JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur certaines surfaces algébriques liées aux fonctions abéliennes de genre trois;

PAR M. L. REMY.

1. Les surfaces hyperelliptiques pour lesquelles les coordonnées d'un point sont des fonctions quadruplement périodiques de deux variables *représentent les couples de points* d'une courbe de genre deux en ce sens qu'à un couple de points de la courbe correspond un point de la surface et réciproquement. D'une manière plus générale, on peut considérer les surfaces algébriques qui représentent les couples de points d'une courbe C de genre p.

De même que pour les surfaces hyperelliptiques, il convient de faire une distinction fondamentale entre le cas où un point de la surface répond à *un seul* couple de points sur la courbe C (surfaces générales d'après M. Picard) et le cas où un point de la surface correspond à *deux* ou *plusieurs* couples (la surface de Kummer en est un exemple classique).

Dans ce Mémoire, nous nous bornerons au cas de $p=3$; la courbe C est alors, si l'on veut et sans que la généralité en soit diminuée, une courbe plane du quatrième ordre. Nous considérerons *les surfaces* S *telles qu'à un point de* S *correspondent deux couples de points de* C *situés en ligne droite.*

Nous établirons quelques théorèmes généraux relativement aux surfaces S et nous en ferons l'application à une surface particulière du sixième ordre.

Correspondance entre les surfaces S et la courbe plane d'ordre quatre.

2. Il convient tout d'abord de rappeler comment on peut représenter les coordonnées d'un point d'une telle surface S au moyen de fonctions abéliennes à six systèmes de périodes.

Soit $f(x, y)=0$ l'équation de la courbe C du quatrième ordre et désignons par

$$g_1(x)\,dx, \quad g_2(x)\,dx, \quad g_3(x)\,dx$$

trois différentielles abéliennes distinctes de première espèce attachées à cette courbe. Posons

$$\begin{aligned} g_1(x_1)\,dx_1+g_1(x_2)\,dx_2+g_1(x_3)\,dx_3&=du,\\ g_2(x_1)\,dx_1+g_2(x_2)\,dx_2+g_2(x_3)\,dx_3&=dv,\\ g_3(x_1)\,dx_1+g_3(x_2)\,dx_2+g_3(x_3)\,dx_3&=dw. \end{aligned}$$

Toute fonction rationnelle symétrique par rapport à (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) est une fonction abélienne de u, v, w; il en est de même si l'on suppose que le point (x_3, y_3) est fixe, mais alors u, v, w sont liés par la relation

$$\vartheta(u-\lambda, v-\mu, w-\nu)=0,$$

$\vartheta(u, v, w)$ désignant une fonction thêta normale du premier ordre (qu'on peut choisir arbitrairement d'ailleurs) et λ, μ, ν des constantes.

Si l'on désigne par $G_i(x)$ l'intégrale $\int g_i(x)\,dx$, on peut, en aug-

mentant u, v, w de constantes et en choisissant convenablement les limites inférieures des intégrales, ramener les relations précédentes à la forme

$$\begin{aligned} G_1(x_1)+G_1(x_2)&=u \\ G_2(x_1)+G_2(x_2)&=v \qquad [\vartheta(u,v,w)=0]. \\ G_3(x_1)+G_3(x_2)&=w \end{aligned}$$

Les surfaces S peuvent dès lors être représentées paramétriquement par les équations

$$X_i=\Phi_i(u,v,w) \qquad (i=1,2,3)$$

où les Φ_i sont des fonctions abéliennes à six systèmes de périodes des trois paramètres u, v, w liés eux-mêmes par la relation

$$\vartheta(u,v,w)=0.$$

3. Nous nous bornerons au cas où les fonctions $\Phi_i(u,v,w)$ sont des fonctions paires de u, v, w. Dans ce cas, à un couple de points (x_1,y_1), (x_2,y_2) correspond un point de la surface S, mais à un point de S répondent deux systèmes de valeurs des arguments (u,v,w) et $(-u,-v,-w)$ et, par suite, deux couples de points (x_1,y_1), (x_2,y_2) et (x'_1,y'_1), (x'_2,y'_2). Ces deux couples satisfont manifestement aux relations

$$\begin{aligned} g_1(x_1)\,dx_1+g_1(x_2)\,dx_2+g_1(x'_1)\,dx'_1+g_1(x'_2)\,dx'_2&=0, \\ g_2(x_1)\,dx_1+\ldots\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad&=0, \\ g_3(x_1)\,dx_1+\ldots\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad&=0, \end{aligned}$$

qui établissent que les deux couples de points sont en ligne droite.

Ce sont les surfaces S de ce type qui font l'objet de ce Mémoire.

Sur le système canonique des surfaces S.

4. Sur la surface S les trois intégrales doubles

$$\iint du\,dv, \quad \iint dv\,dw, \quad \iint dw\,du$$

restent finies à l'intérieur d'un prismatoïde des périodes et, comme elles ne changent pas quand on y remplace respectivement u, v, w par $-u$, $-v$, $-w$, ce sont des intégrales abéliennes de première espèce. On démontre d'ailleurs qu'une surface représentant les couples de points d'une courbe C de genre trois ne saurait avoir plus de trois intégrales doubles de première espèce ([1]).

Les surfaces S *sont donc de genre trois.*

Nous nous proposons d'étudier sur la surface S le système linéaire doublement infini des courbes L découpées par les surfaces adjointes d'ordre $m-4$ (m étant le degré de la surface S) ou système canonique.

5. Il est aisé d'obtenir leur équation en u, v, w. Toute intégrale double de première espèce d'une surface algébrique d'ordre m

$$S(X, Y, Z) = 0$$

est nécessairement de la forme

$$\int\int \frac{dX\,dY}{S'_z} Q(X, Y, Z),$$

$Q(X, Y, Z)$ désignant un polynome adjoint d'ordre $m-4$.

Or

$$dX\,dY = \frac{D(X, Y)}{D(u, v)}\,du\,dv,$$

u et v étant regardés comme variables indépendantes et w comme une fonction de u et v définie par l'équation fondamentale

$$\varphi(u, v, w) = 0.$$

([1]) *Voir* un Mémoire de M. Humbert, *Sur une surface de sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre trois* (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. II, 1896).

On trouve par un calcul simple

$$\frac{D(X,Y)}{D(u,v)} = \frac{H(u,v,w)}{\frac{\partial\vartheta}{\partial w}},$$

en posant

$$H(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial X}{\partial w} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial w} \\ \frac{\partial\vartheta}{\partial u} & \frac{\partial\vartheta}{\partial v} & \frac{\partial\vartheta}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

L'intégrale double générale de première espèce prend donc la forme

$$\begin{aligned}\int\int \lambda\, dv\, dw + \mu\, dw\, du + \nu\, du\, dv &= \int\int \frac{dX\, dY}{S'_z} Q(X,Y,Z) \\ &= \int\int \frac{dX\, dY}{H}\left(\lambda\frac{\partial\vartheta}{\partial u} + \mu\frac{\partial\vartheta}{\partial v} + \nu\frac{\partial\vartheta}{\partial w}\right),\end{aligned}$$

de là résulte que *la courbe générale du système canonique a pour équation*

$$F(u,v,w) = \lambda\frac{\partial\vartheta}{\partial u} + \mu\frac{\partial\vartheta}{\partial v} + \nu\frac{\partial\vartheta}{\partial w} = 0.$$

Il convient de remarquer que cette fonction $F(u,v,w)$ n'est pas une fonction thêta de trois variables indépendantes u, v, w; mais, lorsque u, v, w vérifient l'équation

$$\vartheta(u,v,w) = 0,$$

$F(u,v,w)$ satisfait aux mêmes relations fonctionnelles que la fonction $\vartheta(u,v,w)$, puisque ces relations sont de la forme

$$\vartheta(u + \text{pér.}, v + \text{pér.}, w + \text{pér.}) = e^{P(u,v,w)}\vartheta(u,v,w).$$

Les fonctions $\vartheta(u,v,w)$ et $F(u,v,w)$ sont d'ailleurs de parité contraire.

6. La famille des courbes L présente un intérêt particulier dans

l'étude des surfaces S en raison de son caractère d'invariance, car deux surfaces S admettent manifestement une correspondance birationnelle.

En particulier, le genre $p^{(1)}$ des courbes C est un invariant (*Curvengeschlecht* d'après M. Nöther). Cet invariant se détermine de suite grâce au théorème suivant de M. Nöther :

Si l'on désigne par $p^{(2)}$ le degré du système canonique, c'est-à-dire le nombre de points d'intersection variables de deux courbes L *du système, on a*

$$p^{(1)} = p^{(2)} + 1.$$

Dans le cas actuel $p^{(2)}$ se déduit du nombre des solutions non fixes communes aux trois équations

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial \Im}{\partial u} + \mu_1 \frac{\partial \Im}{\partial v} + \nu_1 \frac{\partial \Im}{\partial w} = 0 \\ \lambda_2 \frac{\partial \Im}{\partial u} + \mu_2 \frac{\partial \Im}{\partial v} + \nu_2 \frac{\partial \Im}{\partial w} = 0 \end{aligned}\right. \qquad [\Im(u, v, w) = 0].$$

Or, ces fonctions satisfaisant sur la surface aux équations fonctionnelles d'une fonction $\Im$ du premier ordre, le théorème de M. Poincaré sur le nombre des solutions communes à trois fonctions thêta leur est applicable; d'après ce théorème, trois fonctions thêta de genre trois, d'ordre m, n, p, ont $6 \times m \times n \times p$ solutions communes; soit, dans le cas actuel, six solutions. Celles-ci sont, deux à deux, égales et de signe contraire et, par suite, il leur correspond trois points de la surface. Ces équations n'ont, d'ailleurs, pas de solution commune fixe, car une telle solution annulerait à la fois

$$\Im(u, v, w), \quad \frac{\partial \Im}{\partial u}, \quad \frac{\partial \Im}{\partial v}, \quad \frac{\partial \Im}{\partial w}.$$

Donc *le degré du système canonique $p^{(2)}$ est égal à* 3 *et le genre $p^{(1)}$ de la courbe générale* L *est égal à* 4 (¹).

7. Les surfaces adjointes d'ordre $m - 4$ dépendant de deux para-

(¹) Le théorème de M. Nöther suppose que les surfaces adjointes ne passent pas toutes par certains points ou lignes simples de la surface. C'est ce que nous vérifierons un peu plus loin pour les surfaces S par un exemple particulier.

mètres, il en existe une infinité qui sont tangentes à la surface en un point; celles-ci découpent une famille simplement infinie de courbes de genre trois. Nous nous proposons d'établir que cette famille joue un rôle essentiel au point de vue du lien qui rattache la surface S à la courbe plane du quatrième ordre C dont dérivent les fonctions abéliennes $\Phi(u, v, w)$.

A cet effet, considérons les équations fondamentales

$$\begin{aligned} G_1(x) + G_1(x') &= u,\\ G_2(x) + G_2(x') &= v,\\ G_3(x) + G_3(x') &= w \end{aligned}$$

qui entraînent entre u, v, w la relation.

$$\mathfrak{S}(u, v, w) = 0.$$

Supposons que le point (x, y) décrive la courbe C, alors que le point (x', y') reste fixe, $(x' = x'_0, y' = y'_0)$; dans ce cas, u, v, w représentent, à une constante près, les intégrales de première espèce $G_1(x)$, $G_2(x)$, $G_3(x)$ attachées à C.

D'ailleurs, la courbe C étant du quatrième ordre, on peut prendre pour $G_1(x)$, $G_2(x)$, $G_3(x)$ les intégrales

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} g_1(x) &= \int_{x_0}^{x} \frac{x}{f'_y}\,dx,\\ \int_{x_0}^{x} g_2(x) &= \int_{x_0}^{x} \frac{y}{f'_y}\,dx,\\ \int_{x_0}^{x} g_3(x) &= \int_{x_0}^{x} \frac{1}{f'_y}\,dx. \end{aligned}$$

Dans cette hypothèse, u, v, w sont liés par une deuxième relation qu'il est aisé d'expliciter; si l'on pose, en effet,

$$\begin{aligned} u' &= u + \int_{x'_0}^{\xi} g_1(x)\,dx = G_1(x) + G_1(\xi),\\ v' &= v + \int_{x'_0}^{\xi} g_2(x)\,dx = G_2(x) + G_2(\xi),\\ w' &= w + \int_{x'_0}^{\xi} g_3(x)\,dx = G_3(x) + G_3(\xi), \end{aligned}$$

u', v', w' vérifient manifestement l'équation

$$\varphi(u', v', w') = 0.$$

On a donc, quel que soit ξ,

$$\varphi\left[u + \int_{x'_0}^{\xi} g_1(x)\,dx,\ v + \int_{x'_0}^{\xi} g_2(x)\,dx,\ w + \int_{x'_0}^{\xi} g_3(x)\,dx\right] = 0;$$

d'où, en dérivant cette équation par rapport à ξ,

$$\begin{aligned} & g_1(\xi)\frac{\partial}{\partial u}\varphi\left[u + \int_{x'_0}^{\xi} g_1(x)\,dx, \ldots\right] \\ & + g_2(\xi)\frac{\partial}{\partial v}\varphi\left[u + \int_{x'_0}^{\xi} g_2(x)\,dx, \ldots\right] \\ & + g_3(\xi)\frac{\partial}{\partial w}\varphi\left[u + \int_{x'_0}^{\xi} g_3(x)\,dx, \ldots\right] = 0 \end{aligned}$$

et, en faisant $\xi = x'_0$,

$$x'_0\frac{\partial}{\partial u}\varphi(u, v, w) + y'_0\frac{\partial}{\partial v}\varphi(u, v, w) + \frac{\partial}{\partial w}\varphi(u, v, w) = 0.$$

Telle est la relation cherchée entre u, v, w.

Cette équation définit sur la surface S une courbe $\mathfrak{L}$ dont les points répondent aux couples de C formés du point fixe $A_0(x'_0, y'_0)$ et d'un point variable (x, y). De cette définition il résulte que les courbes $\mathfrak{L}$ et C se correspondent point par point.

La courbe $\mathfrak{L}$ est une courbe particulière du système canonique, car son équation est de la forme

$$\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \mu\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \nu\frac{\partial\varphi}{\partial w} = 0,$$

λ, μ, ν vérifiant l'équation homogène de la courbe C,

$$f(\lambda, \mu, \nu) = 0.$$

Lorsque le point (x, y) décrit la courbe C, le point (u, v, w) décrit

la courbe $\mathfrak{L}$ sur la surface S. Considérons la tangente au point A_0 à la courbe C qui coupe de nouveau cette courbe en deux points A_1, A_2; aux couples (A_0, A_1) et (A_0, A_2) répond un seul et même point α de la surface; mais en ce point passent deux branches de la courbe $\mathfrak{L}$ qui correspondent respectivement aux positions de (x, y) voisines de A_1 et à celles voisines de A_2. Les courbes $\mathfrak{L}$ sont donc les courbes du système canonique qui possèdent un point double.

Nous parvenons ainsi au théorème suivant :

La condition $f(\lambda, \mu, \nu) = 0$ *qui exprime que la surface adjointe d'ordre* $m - 4$

$$\lambda Q_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + \mu Q_2(x_1, \ldots, x_4) + \nu Q_3(x_1, \ldots, x_4) = 0$$

est tangente à S, *est une équation algébrique de genre trois, et c'est précisément de la courbe* $f(\lambda, \mu, \nu) = 0$ *que dérivent les fonctions abéliennes* $\Phi(u, v, w)$ *qui définissent la représentation paramétrique de la surface* $S(u, v, w)$.

Les surfaces adjointes d'ordre $m - 4$ *qui sont tangentes à* S *découpent sur cette surface une famille simplement infinie de courbes de genre trois et de mêmes modules; ces modules sont ceux de la courbe fondamentale* $f(\lambda, \mu, \nu) = 0$ (¹).

8. Ces théorèmes permettent de préciser la correspondance géométrique entre la surface $S(u, v, w)$ et le plan de la courbe C.

A toute courbe $\mathfrak{L}$ tracée sur la surface correspond un point de la courbe C.

Plus généralement, à l'adjointe générale L ayant pour équation

$$\lambda \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u} + \mu \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v} + \nu \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w} = 0$$

(¹) M. Humbert a établi les propriétés précédentes pour une surface particulière $S(u, v, w)$ (*Comptes rendus*, 1er semestre 1893). Dès lors, elles s'étendent à toute surface analogue en raison de leur caractère d'invariance. Sa démonstration est fondée sur d'élégantes propriétés géométriques de cette surface; mais, en raison même de la généralité de ces théorèmes, il n'était peut-être pas sans intérêt d'en donner une démonstration analytique.

correspond, dans le plan de la courbe C, le point de coordonnées homogènes λ, μ, ν, en ce sens que les points de la surface situés sur la courbe L sont définis par les couples de points (M, M′) de C situés sur une sécante variable passant par le point (λ, μ, ν). En effet, la droite qui joint les couples de points (M, M′) enveloppe une courbe algébrique; soit ρ la classe de cette courbe. Évaluons, en fonction de ρ, le nombre de points d'intersection de L avec une autre courbe L′ du système canonique; nous avons à prendre les tangentes communes à deux courbes de classe ρ, au nombre de ρ^2, et chacune d'elles coupe C en quatre points que l'on peut répartir de trois manières en deux couples (M, M′). Dès lors, les courbes L, L′ de la surface se coupent en $3\rho^2$ points et, comme le degré du système canonique est égal à 3, on a nécessairement $\rho = 1$. Les points de la courbe L répondent donc aux couples de points C découpés par une sécante qui tourne autour d'un point fixe.

Si la courbe L décrit sur la surface S un faisceau linéaire, son point représentatif (λ, μ, ν) décrit dans le plan une droite Δ : aux trois points-bases du faisceau correspondent les trois répartitions en deux couples des quatre points d'intersection de Δ et de C. Si l'on désigne par u_0, v_0, w_0 les arguments de l'un quelconque des trois points-bases, les coordonnées a, b, c de la droite Δ

$$a\lambda + b\mu + c\nu = 0$$

sont proportionnelles à

$$\frac{\partial}{\partial u}\Im(u_0, v_0, w_0), \quad \frac{\partial}{\partial v}\Im(u_0, v_0, w_0), \quad \frac{\partial}{\partial w}\Im(u_0, v_0, w_0).$$

De cette correspondance découle le théorème suivant :

Tout faisceau linéaire de surfaces adjointes à la surface S *comprend quatre surfaces tangentes à* S; *à chacune des trois répartitions en deux couples de ces quatre surfaces correspond un point bien déterminé m parmi les trois points bases du faisceau.*

9. Nous considérerons enfin deux courbes de la surface S qui sont liées à la famille des courbes $\mathcal{L}$; l'une, L_a, est le lieu de leur point double a; l'autre, L_b, est le lieu du point b commun à toutes les adjointes passant par le point a.

Ces courbes ont une représentation simple sur le plan (λ, μ, ν); considérons une tangente variable de la courbe C et désignons par o le point de contact et par 1, 2 les autres points d'intersection; d'après les considérations précédentes, aux couples (0, 1), (0, 2) correspond le point double a et aux couples (0, 0), (1, 2) correspond le point b. La courbe L_b est donc définie par les relations

$$\begin{aligned} u &= 2G_1(x), \\ v &= 2G_2(x), \\ w &= 2G_3(x); \end{aligned}$$

d'où l'on déduit de suite :

$$\left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{S}(u, v, w) = 0, \\ &\mathfrak{S}\left(\frac{u}{2}, \frac{v}{2}, \frac{w}{2}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Quant à l'équation de la courbe L_a, elle peut s'obtenir directement de la manière suivante : soit

$$F(u, v, w) = \lambda \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u} + \mu \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v} + \nu \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w} = 0$$

l'équation d'une courbe $\mathcal{L}$ à point double; les arguments de ce point double u, v, w vérifient les équations suivantes :

$$\begin{gathered} \mathfrak{S}(u, v, w) = 0, \\ F(u, v, w) = 0, \\ \frac{\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v}}{\frac{\partial F}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial \mathfrak{S}}{\mathfrak{S} w}}{\frac{\partial F}{\partial w}}; \end{gathered}$$

ou, en développant les trois dernières équations,

$$\begin{aligned}
&\lambda \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u} + \mu \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v} + \nu \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w} = 0,\\
&\lambda \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u^2} + \mu \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u\,\partial v} + \nu \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u\,\partial w} + \rho \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u} = 0,\\
&\lambda \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u\,\partial v} + \mu \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial v^2} + \nu \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial v\,\partial w} + \rho \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v} = 0,\\
&\lambda \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u\,\partial w} + \mu \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial v\,\partial w} + \nu \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial w^2} + \rho \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w} = 0.
\end{aligned}$$

Ces relations entraînent, puisque λ, μ, ν, ρ ne sont pas tous nuls,

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u\,\partial w} & \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u}\\
\frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial v\,\partial w} & \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v}\\
\frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u\,\partial w} & \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial v\,\partial w} & \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial w^2} & \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w}\\
\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w} & 0
\end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation de la courbe C. On vérifie aisément, en vertu de la relation $\mathfrak{S}(u, v, w) = 0$, que cette fonction satisfait aux équations fonctionnelles d'une fonction thêta paire, d'ordre quatre, de caractéristique nulle et qu'elle admet pour zéros doubles les 28 demi-périodes qui annulent $\mathfrak{S}$.

Définition analytique d'une surface S d'ordre six.

10. Avant de définir la surface particulière $S(u, v, w)$ qui fait l'objet de la seconde Partie de ce travail, il convient de rappeler quelques propriétés des fonctions thêta de genre trois. Soit un Tableau normal de périodes :

$$\begin{matrix}
2\pi i, & 0, & 0, & a, & b, & c,\\
0, & 2\pi i, & 0, & b, & d, & e,\\
0, & 0, & 2\pi i, & c, & e, & h;
\end{matrix}$$

on appelle *fonction thêta normale, d'ordre m*, une fonction uniforme, entière, de u, v, w, vérifiant les relations

$$\begin{aligned}
\Theta(u+2\pi i, v, w) &= e^{\varepsilon_1 \pi i}\Theta(u, v, w),\\
\Theta(u, v+2\pi i, w) &= e^{\varepsilon_2 \pi i}\Theta(u, v, w),\\
\Theta(u, v, w+2\pi i) &= e^{\varepsilon_3 \pi i}\Theta(u, v, w),\\
\Theta(u+a, v+b, w+c) &= e^{\eta_1 \pi i}\, e^{-mu-m\frac{a}{2}}\,\Theta(u, v, w),\\
\Theta(u+b, v+d, w+e) &= e^{\eta_2 \pi i}\, e^{-mv-m\frac{d}{2}}\,\Theta(u, v, w),\\
\Theta(u+c, v+e, w+h) &= e^{\eta_3 \pi i}\, e^{-mw-m\frac{h}{2}}\,\Theta(u, v, w),
\end{aligned}$$

ε_1, ε_2, ε_3, η_1, η_2, η_3 désignant 0 ou 1. L'ensemble des six nombres

$$\begin{matrix} \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \varepsilon_3, \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3 \end{matrix}$$

est dit *la caractéristique de la fonction thêta;* la caractéristique est dite *nulle* si les six nombres sont nuls.

D'après cela, pour tout ordre m, il y a 64 caractéristiques différentes, c'est-à-dire 64 systèmes de fonctions thêta normales; en particulier, il y a 64 fonctions thêta normales d'ordre *un*, $\vartheta(u, v, w)$. Parmi ces fonctions, 36 sont paires et 28 sont impaires; chacune s'annule pour 28 demi-périodes, c'est-à-dire pour 28 systèmes de valeurs de u, v, w compris dans les formules

$$\begin{aligned}
u &= l\pi i + p\frac{a}{2} + q\frac{b}{2} + r\frac{c}{2},\\
v &= m\pi i + p\frac{b}{2} + q\frac{d}{2} + r\frac{e}{2},\\
w &= n\pi i + p\frac{c}{2} + q\frac{e}{2} + r\frac{h}{2}
\end{aligned}$$

$$(l, m, n, p, q, r = 0 \text{ ou } 1).$$

M. Humbert a fait connaître un algorithme qui établit un lien entre

les 64 fonctions $\mathfrak{S}$ et les demi-périodes qui annulent chacune d'elles. Nous en ferons un fréquent usage dans la suite.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$; $\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta''$ trois séries de quatre caractères; les 64 symboles $\alpha\alpha'\alpha''$ représenteront les 64 fonctions thêta normales d'ordre *un* et les 64 symboles $(\alpha\alpha'\alpha'')$ représenteront les 64 demi-périodes, de telle sorte :

1° Que les 28 demi-périodes annulant la fonction $\alpha\alpha'\alpha''$ soient représentées par les symboles $(pp'p'')$, où les caractères $\alpha, \alpha', \alpha''$ figurent au total un nombre impair de fois;

2° Que les 28 fonctions qui s'annulent pour la demi-période $(\alpha\alpha'\alpha'')$ soient également représentées par les symboles $pp'p''$, où les caractères $\alpha, \alpha', \alpha''$ figurent, au total, un nombre impair de fois.

L'algorithme jouit des propriétés suivantes :

Considérons le produit de fonctions thêta normales, d'ordre *un*, en nombre pair, telles que $\alpha\alpha'\alpha''$, $\beta\beta'\beta''$, ...; écrivons à la suite les uns des autres les caractères qui entrent dans les symboles de ces fonctions et traitons cette expression comme un produit algébrique; elle sera de la forme

$$\alpha^h \beta^k \gamma^l \delta^m \alpha'^{h'} \ldots \alpha''^{h''} \ldots \delta''^{m''}.$$

Si les exposants h, k, l, m sont entre eux de même parité, ainsi que les exposants h', k', l', m' et les exposants h'', k'', l'', m'', le produit des fonctions thêta considérées (produit qui est évidemment une fonction thêta normale) aura sa caractéristique nulle.

De plus, si la somme $h + h' + h''$ est paire, ce produit sera une fonction paire de u, v, w.

11. Pour définir la surface S, on considère les fonctions $\Theta(u, v, w)$ normales, de caractéristique nulle, du second ordre et paires; elles sont au nombre de huit linéairement indépendantes, parmi lesquelles $\mathfrak{S}^2$, en désignant par $\mathfrak{S}(u, v, w) = 0$ la relation fondamentale que u, v, w sont toujours supposés vérifier. On peut donc déterminer *quatre* fonctions $\Theta(u, v, w)$ non identiquement nulles, linéairement indépendantes et s'annulant [nécessairement à l'ordre deux (¹)] pour trois demi-périodes p arbitrairement choisies.

(¹) Supposons, en effet, que cette demi-période p soit $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$;

Ceci posé, la surface $S(u, v, w)$ est définie paramétriquement par les équations

$$x_i = \Theta_i(u, v, w) \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Les trois demi-périodes p seront choisies parmi celles qui annulent $\mathfrak{S}$; mais on reconnaît par l'algorithme qu'il existe deux types distincts de groupes de trois demi-périodes : dans le premier cas, elles annulent toutes trois six fonctions thêta du premier ordre; dans le second cas, elles en annulent quatre. Nous examinerons exclusivement le premier cas qui conduit à des résultats beaucoup plus symétriques. Pour fixer les idées, les trois demi-périodes seront désignées par les symboles

$$\begin{array}{lcl} (\alpha\alpha'\alpha'') & \text{ou} & p_\alpha, \\ (\alpha\alpha'\beta'') & \text{ou} & p_\beta, \\ (\alpha\alpha'\gamma'') & \text{ou} & p_\gamma \end{array}$$

et l'équation fondamentale $\mathfrak{S}(u, v, w)$ sera notée $\alpha\beta'\delta''$ ou pour abréger simplement par $\mathfrak{S}$.

12. Le degré de la surface est égal au nombre des solutions non fixes communes aux trois équations

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(u, v, w) &= 0, \\ a_1\Theta_1 + a_2\Theta_2 + a_3\Theta_3 + a_4\Theta_4 &= 0, \\ b_1\Theta_1 + b_2\Theta_2 + b_3\Theta_3 + b_4\Theta_4 &= 0, \end{aligned}$$

les a et b étant des constantes arbitraires. D'après le théorème de M. Poincaré, ces trois équations ont $6 \times 2 \times 2 \times 1 = 24$ solutions communes, parmi lesquelles figurent les trois demi-périodes p_α, p_β, p_γ qui comptent chacune pour quatre solutions. Les autres solutions, au nombre de $24 - 12 = 12$, sont deux à deux égales et de signe contraire, en sorte qu'il ne leur correspond que $\frac{1}{2}12 = 6$ points sur la surface S.

La surface S *est donc du sixième ordre.*

---

les fonctions étant paires, si le point p est un zéro, il est nécessairement un zéro double.

13. Aux 28 demi-périodes qui annulent $\mathfrak{Z}$ correspondent sur la surface des lignes et des points remarquables.

Aux trois demi-périodes annulant à la fois $\mathfrak{Z}$ et les quatre fonctions Θ_i correspondent trois *unicursales singulières*, lesquelles sont des coniques, puisque p_α, p_β, p_γ sont des zéros doubles pour les fonctions Θ_i.

Aux 25 autres demi-périodes annulant $\mathfrak{Z}$ et non les Θ_i répondent sur la surface S *vingt-cinq points doubles :* supposons, en effet, que l'une des demi-périodes soit $u = v = w = 0$; les fonctions Θ_i ne s'annulant pas pour $u = v = w = 0$ et étant paires, on aura, aux environs de $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$,

$$\Theta_i = a_i + (A_i u^2 + B_i v^2 + C_i w^2 + D_i uv + E_i vw + F_i wu) + \ldots,$$

d'où l'on conclut aisément qu'une droite menée par le point $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ de la surface S a, avec celle-ci, deux intersections confondues au point considéré.

Courbe double de la surface S.

14. Les surfaces adjointes à S sont des quadriques dépendant de deux paramètres : la surface possède donc nécessairement une courbe ou des points multiples. Ce sont ces courbes que nous étudierons tout d'abord.

Il a été établi que la courbe mobile d'intersection de la surface S par une adjointe a pour équation

$$F(u, v, w) = \lambda \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial u} + \mu \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial v} + \nu \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial w} = 0.$$

La fonction F ne s'annule, en général, pour aucune demi-période, mais on peut disposer des paramètres $\frac{\lambda}{\nu}$, $\frac{\mu}{\nu}$, de manière qu'elle s'annule pour deux demi-périodes p_i, p_j choisies par exemple parmi celles qui annulent $\mathfrak{Z}$. Dans ce cas, chacune d'elles est pour la fonction F un zéro double. Supposons, en effet, pour fixer les idées, que p_i désigne la période $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, ce qui implique que la fonction $\mathfrak{Z}$ est impaire : il résulte de là que F est une fonction paire et ne

peut s'annuler pour p_i qu'à l'ordre deux. Nous désignerons

Par F_α la fonction F qui s'annule pour p_β et p_γ,
» F_β » » p_γ et p_α,
» F_γ » » p_α et p_β.

Ceci posé, les produits $F_\alpha F_\beta$, $F_\beta F_\gamma$, $F_\gamma F_\alpha$ satisfont [lorsqu'on suppose u, v, w liés par la relation $\mathfrak{S}(u, v, w) = 0$] aux mêmes relations fonctionnelles que les fonctions Θ_i et nous pouvons dès lors prendre pour fonctions coordonnées

$$x_1 = F_\beta F_\gamma,$$
$$x_2 = F_\gamma F_\alpha,$$
$$x_3 = F_\alpha F_\beta,$$
$$x_4 = \Theta_4(u, v, w).$$

15. Considérons le plan variable $x_3 + \rho x_2 = 0$: il coupe la surface suivant la courbe fixe $F_\alpha = 0$ et suivant la courbe variable $F_\beta + \rho F_\gamma = 0$. Or, cette dernière fonction est, sur la surface S, une fonction thêta d'ordre *un* s'annulant au second ordre pour la demi-période p_α, d'où l'on déduit que le degré de la courbe est égal à

$$\tfrac{1}{2}(6 \times 2 \times 1 \times 1 - 2 \times 2) = 4.$$

Il en résulte nécessairement que la droite D_α, commune aux plans $x_3 + \rho x_2 = 0$, est une droite double de la surface. Il en serait de même pour les droites $x_3 = 0$, $x_1 = 0$ et $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; ces trois droites doubles passent toutes trois par le sommet $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ du tétraèdre de référence.

Donc, *la surface* S *possède trois droites doubles* D_α, D_β, D_γ *concourantes; leur point de concours est un point triple de la surface.*

Les coniques singulières répondant aux demi-périodes p_α, p_β, p_γ sont situées respectivement dans les faces du trièdre formé par les droites doubles. En effet, l'équation du plan de la conique p_α

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = \Theta_\alpha(u, v, w) = 0$$

s'obtient en déterminant les constantes $\frac{a_1}{a_4}$, $\frac{a_2}{a_4}$, $\frac{a_3}{a_4}$, de manière que la fonction Θ_α admette p_α comme zéro d'ordre de multiplicité supérieur à deux. Dès lors

$$\Theta_\alpha = F_\beta F_\gamma = x_1.$$

16. Il est intéressant de préciser la représentation analytique des points multiples de la surface. Considérons un plan arbitraire

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = \Theta(u, v, w) = 0$$

et cherchons son point d'intersection avec la droite double D_α. Les fonctions $\mathfrak{S}$, F_α, Θ ont, en dehors des demi-périodes p_β, p_γ,

$$(6 \times 1 \times 1 \times 2 - 2 \times 2 \times 2) = 4$$

solutions communes, deux à deux égales et de signe contraire. Ces deux systèmes de valeurs des arguments

$$(\pm u', \pm v', \pm w'), \quad (\pm u'', \pm v'', \pm w'')$$

définissent le même point de la droite double, considéré comme appartenant à l'une ou à l'autre nappe de la surface.

On obtient le point triple en considérant les solutions communes aux équations $\mathfrak{S} = 0$, $F_\beta = 0$, $F_\gamma = 0$; en dehors de la demi-période p_α, elles ont $(6 \times 1 \times 1 \times 1 - 2 \times 2) = 2$ solutions communes; désignons-les par $(\pm u_\alpha, \pm v_\alpha, \pm w_\alpha)$; soient de même $(\pm u_\beta, \pm v_\beta, \pm w_\beta)$ et $(\pm u_\gamma, \pm v_\gamma, \pm w_\gamma)$ les solutions communes respectivement aux équations $\mathfrak{S} = 0$, $F_\gamma = 0$, $F_\alpha = 0$ et aux équations $\mathfrak{S} = 0$, $F_\alpha = 0$, $F_\beta = 0$. Ces trois systèmes de valeurs des paramètres définissent les trois nappes de la surface qui se coupent au point triple.

17. Les quadriques adjointes à la surface S sont nécessairement des cônes du second ordre ayant pour sommet le point triple et contenant les trois droites doubles. Effectivement la fonction

$$F_\alpha F_\beta F_\gamma \left(\lambda \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u} + \mu \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v} + \nu \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w}\right)$$

est, sur la surface, une fonction thêta d'ordre quatre, de caractéristique

nulle, paire et s'annulant à l'ordre quatre pour les trois demi-périodes p_α, p_β, p_γ, ce qui prouve qu'elle représente l'intersection complète de la surface S par une quadrique.

En effet, il existe $\frac{4^3+8}{2} = 36$ fonctions thêta paires, d'ordre quatre, de caractéristique nulle, linéairement distinctes; il faut en déduire les $\frac{3^3+1}{2} = 14$ produits de ϑ par une fonction thêta, d'ordre trois, de même parité et de même caractéristique que ϑ. Parmi ces fonctions on peut donc en former $36 - 14 - 3 \times 4 = 10$ qui s'annulent à l'ordre quatre pour les trois demi-périodes. C'est précisément le nombre des termes du polynome homogène du second degré en x_1, x_2, x_3, x_4. Donc une telle fonction peut s'exprimer par un polynome homogène du second degré en x_1, x_2, x_3, x_4.

18. Deux cônes adjoints quelconques se coupent, en dehors des droites doubles, suivant une droite D passant par le point triple; et ceci précise la correspondance entre la courbe plane C du quatrième ordre et la surface considérée S. Aux trois répartitions en deux couples des quatre points d'intersection de C avec une droite Δ répondent trois points de la surface en ligne droite avec le point triple. A toute droite Δ du plan de la courbe C correspond ainsi une droite D de l'espace menée par le point triple et réciproquement.

La courbe L_a, lieu géométrique des points de contact des surfaces adjointes tangentes à S (nº **9**), est, dans le cas actuel, la courbe de contact du cône circonscrit à S et ayant le point triple pour sommet. La courbe L_b est l'intersection résiduelle de ce cône par la surface.

Ce cône circonscrit est, comme le montre aisément la Géométrie analytique, un cône d'ordre dix-huit admettant les droites D comme droites multiples d'ordre huit. Il existe une correspondance univoque entre les génératrices de ce cône et les tangentes à la courbe fondamentale C.

Sur les courbes définies par les fonctions thêta du premier ordre.

19. Les 63 fonctions thêta du premier ordre autres que $\vartheta = 0$ définissent sur S des courbes intéressantes; leur étude se fait aisément

au moyen de l'algorithme du n° **10** et elle nous conduira à une définition et à une génération géométriques de la surface S.

Chacune de ces courbes est de genre un; en effet, toute fonction normale du premier ordre $\mathfrak{S}_k$ se déduit de $\mathfrak{S}$ (à un facteur exponentiel près) en augmentant u, v, w d'une demi-période et, par suite, aux points de la courbe $\mathfrak{S}_k = 0$ sur la surface correspondent sur la courbe plane C les couples (x_1, x_2), (x'_1, x'_2) vérifiant les relations

$$G_1(x_1) + G_1(x_2) = G_1(x'_1) + G_1(x'_2) + \frac{\mathfrak{P}_1}{2},$$

$$G_2(x_1) + G_2(x_2) = G_2(x'_1) + G_2(x'_2) + \frac{\mathfrak{P}_2}{2},$$

$$G_3(x_1) + G_3(x_2) = G_3(x'_1) + G_3(x'_2) + \frac{\mathfrak{P}_3}{2}.$$

Désignons par x_3, x_4 les deux points de C en ligne droite avec x'_1, x'_2; les équations précédentes s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Sigma_j\, G_1(x_j) &= \frac{\mathfrak{P}_1}{2} \\ \Sigma_j\, G_2(x_j) &= \frac{\mathfrak{P}_2}{2} \qquad (j = 1, 2, 3, 4), \\ \Sigma_j\, G_3(x_j) &= \frac{\mathfrak{P}_3}{2} \end{aligned}$$

$\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ étant une période; ces relations établissent que les quatre points x_1, x_2, x_3, x_4 sont les points de contact de la courbe C avec une conique quadritangente. Chacune des courbes $\mathfrak{S}_k = 0$ correspond donc, point par tangente, à l'enveloppe des droites joignant deux à deux, sur C, les quatre points de contact des coniques inscrites d'un même système. Or ces droites enveloppent, ainsi qu'il est connu, une courbe générale de troisième classe et de genre un. *Les courbes* $\mathfrak{S}_k = 0$ *de la surface* S *sont donc de genre un* ([1]).

Il convient de distinguer les 63 fonctions $\mathfrak{S}$ en quatre groupes,

---

([1]) Cette démonstration, due à M. Humbert (*Journal de Mathématiques*, 1896), a été reproduite ici pour la clarté de l'exposition.

suivant qu'elles s'annulent pour 3, 2, 1 ou 0 des trois demi-périodes p_α. p_β, p_γ. Nous examinerons successivement ces différents cas.

Plans tangents singuliers de la surface S.

20. D'après le choix des périodes p_α, p_β, p_γ, il existe, en dehors de ϑ, cinq fonctions thêta du premier ordre s'annulant pour ces trois demi-périodes. Elles répondent aux symboles suivants :

$$\begin{array}{lcl} \alpha\gamma'\hat{\delta}'' & \text{ou} & \vartheta_1, \\ \alpha\hat{\delta}'\hat{\delta}'' & \text{ou} & \vartheta_2, \\ \beta\alpha'\hat{\delta}'' & \text{ou} & \vartheta_3, \\ \gamma\alpha'\hat{\delta}'' & \text{ou} & \vartheta_4, \\ \hat{\delta}\alpha'\hat{\delta}'' & \text{ou} & \vartheta_5. \end{array}$$

La courbe $\vartheta_i = 0$ est de degré $\frac{6 \times 1 \times 1 \times 2 - 3 \times 1 \times 2}{2} = 3$; c'est une courbe plane, car la fonction $(\vartheta_i)^2$ peut s'exprimer par une combinaison linéaire et homogène de x_1, x_2, x_3, x_4 ; et le plan de cette cubique est tangent à la surface tout le long de cette courbe. Enfin la cubique n'a pas de point double, puisqu'elle est de genre un.

La surface S *admet donc cinq plans tangents singuliers le long d'une cubique.*

21. L'algorithme permet d'étudier simplement la répartition des vingt-cinq points doubles par rapport aux cinq plans tangents singuliers P_1, P_2, ..., P_5. Les vingt-cinq points doubles comprennent les *dix sommets du pentaèdre* formé par les cinq plans. En outre, chaque plan tangent singulier contient *trois* points doubles. Ainsi, le plan P_1 noté $\alpha\gamma'\hat{\delta}''$ contient les trois points doubles

$$(\alpha\hat{\delta}'\alpha''), \quad (\alpha\hat{\delta}'\beta''), \quad (\alpha\hat{\delta}'\gamma'').$$

Ces points seront dénommés $A_{\alpha,1}$, $A_{\beta,1}$, $A_{\gamma,1}$, l'un des indices se rapportant aux plans P_i, l'autre aux demi-périodes p_α, p_β, p_γ ou encore aux droites doubles D_α, D_β, D_γ. Il en serait de même pour les autres plans P_i.

Enfin, en dehors de ces points singuliers pour lesquels les tangentes à S forment un cône proprement dit, chaque plan P_i contient trois autres points doubles qui sont les traces des droites doubles. Ces points sont nécessairement des points-pince.

Quadriques circonscrites à la surface S.

22. A toute fonction $\mathfrak{S}$ qui s'annule pour deux des demi-périodes p_α, p_β, p_γ correspond une courbe gauche, d'ordre

$$\frac{6 \times 1 \times 1 \times 2 - 2 \times 2}{2} = 4$$

et de genre un, c'est-à-dire une biquadratique.

Le long de cette courbe on peut circonscrire à la surface S une quadrique qui la coupe en outre suivant deux des droites doubles; car, si la fonction $\mathfrak{S}$ s'annule pour p_β et p_γ, on établit, d'après un raisonnement déjà employé, que l'équation

$$(\mathfrak{S})^2 F_\beta F_\gamma = 0$$

représente l'intersection complète de S par une quadrique.

En vertu de l'algorithme, il existe *dix-huit* fonctions de ce type; parmi elles les *trois* fonctions

$$\alpha\beta'\alpha'' \quad \text{ou} \quad Q_\alpha,$$
$$\alpha\beta'\beta'' \quad \text{ou} \quad Q_\beta,$$
$$\alpha\beta'\gamma'' \quad \text{ou} \quad Q_\gamma$$

jouent un rôle particulier.

La biquadratique $Q_\alpha = 0$ ne contient aucun des sommets du pentaèdre, et elle passe par les dix points doubles

$$A_{\beta,i}, \quad \ldots, \qquad \text{et} \qquad A_{\gamma,i}, \quad \ldots, \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

On peut en déduire une conséquence géométrique intéressante : la biquadratique $Q_\alpha = 0$ perce le plan P_i aux deux points doubles $A_{\beta,i}$, $A_{\gamma,i}$; d'ailleurs, elle ne saurait passer par la trace des droites doubles D

sur le plan P_i, car, en raison du rôle symétrique joué par les plans P, elle passerait de même par les traces de D sur les quatre autres plans P. Elle est donc nécessairement tangente au plan P en un point simple de la surface, et la quadrique Q_α, circonscrite à la surface S le long de la biquadratique, est tangente au plan P_i en ce point.

En résumé, la quadrique Q_α contient les droites D_β, D_γ et elle est tangente aux cinq plans P_i. Il existe donc trois quadriques Q_α, Q_β, Q_γ (n'appartenant pas à un même faisceau) tangentes aux cinq plans P_i et aux plans du trièdre formé par les droites doubles; en d'autres termes :

Les cinq plans tangents singuliers forment avec les plans du trièdre des droites doubles un groupe de huit plans de Lamé.

D'ailleurs, ces huit plans ne sont soumis à aucune autre condition; ils déterminent, en effet, sans ambiguïté, la surface S [1]. Or un groupe de Lamé dépend de vingt et un paramètres, soit, au point de vue projectif, six paramètres; c'est précisément le nombre des modules dont dépend la représentation paramétrique par les fonctions abéliennes.

Définition géométrique de la surface S.

23. La surface du sixième ordre $S(u, v, w)$ qui a été définie analytiquement possède trois droites doubles concourantes et cinq plans tangents singuliers : ces propriétés sont caractéristiques.

Soit, en effet, une surface du sixième ordre Σ jouissant de ces propriétés; désignons par $P_1, \ldots, P_5$ ses plans tangents singuliers et par Π_α, Π_β, Π_γ les faces du trièdre des droites doubles, et considérons le plan Π'_γ qui forme, avec les sept plans $P_1, P_2, \ldots, P_5$, Π_α et Π_β un groupe de Lamé.

Les huit plans $P_1, P_2, \ldots, P_5$, Π_α, Π_β, Π'_γ déterminent sans ambi-

---

[1] Les cubiques de contact de chaque plan singulier doivent passer, en effet, par les six sommets du quadrilatère complet découpé dans ce plan par les quatre autres plans singuliers, par les traces des droites *doubles* et par les points de contact des quadriques Q_α, Q_β, Q_γ.

guïté une surface $S(u, v, w)$ définie au moyen des fonctions abéliennes $\Phi(u, v, w)$. Je dis que S coïncide avec Σ et, par suite, Π'_γ avec Π_γ.

Les coniques C_α, Γ_α suivant lesquelles le plan Π_α coupe les surfaces S et Σ, en dehors des droites doubles, coïncident, puisqu'elles sont tangentes toutes deux aux traces des cinq plans $P_1, \ldots, P_5$, et il en est de même pour les coniques C_β, Γ_β situées dans le plan Π_β. D'autre part, chacun des plans P_i coupe les surfaces S et Σ suivant deux cubiques c_i, γ_i, lesquelles ont neuf points communs, savoir : six sommets du pentaèdre, la trace de la droite double D_γ, intersection des plans Π_α, Π_β, et les points de contact des coniques situés dans les plans Π_α et Π_β. Admettons provisoirement que ces neuf points ne forment pas la base d'un faisceau de cubiques; dès lors, les cubiques c_i et γ_i coïncident et l'on en déduit que les surfaces S et Σ sont confondues.

Pour établir que les neuf points ne sont pas la base d'un faisceau de cubiques, il suffit de remarquer que, dans cette hypothèse, dès que les six plans $P_1, \ldots, P_5$, Π_α seraient donnés, ainsi que la droite double D_γ, le plan Π_β serait parfaitement déterminé, devant passer par le neuvième point base du faisceau; or nous avons vu plus haut que les sept plans $P_1, P_2, \ldots, P_5, \Pi_\alpha, \Pi_\beta$ peuvent être pris arbitrairement. C. Q. F. D.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Toute surface du sixième ordre qui possède trois droites doubles concourantes et cinq plans tangents singuliers est une surface $S(u, v, w)$, *c'est-à-dire qu'elle peut être associée à une courbe plane* C *d'ordre quatre de telle façon qu'à un point de la surface correspondent deux couples de points de* C *situés en ligne droite et réciproquement.*

Les cinq plans tangents singuliers et les plans du trièdre des trois droites doubles forment nécessairement un groupe de huit plans de Lamé.

24. Nous présenterons une dernière remarque relative aux biquadratiques Q_α, Q_β, Q_γ et qui conduit à une forme simple de l'équation de la surface. Considérons le produit des quatre fonctions Q_α, Q_β, Q_γ, $\mathfrak{S}$

dont les symboles sont respectivement

$$\alpha\beta'\alpha'', \quad \alpha\beta'\beta'', \quad \alpha\beta'\gamma'', \quad \alpha\beta'\delta''.$$

En vertu de l'algorithme, c'est une fonction thêta impaire de caractéristique nulle; dès lors le produit $Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma$ est une fonction thêta d'ordre trois, de même caractéristique que ϑ, mais de parité contraire. D'après un théorème général qui sera établi plus loin, une telle fonction définit l'intersection de S par une surface adjointe d'ordre trois Σ_3.

De même que les quadriques Q_α, Q_β, Q_γ, la surface cubique Σ_3 est parfaitement déterminée dès que l'on se donne les huit plans P et Π, car elle contient les droites doubles D et les quinze points de contact des quadriques Q_α, Q_β, Q_γ avec les cinq plans P_i. Désignons par les mêmes lettres Q_α, ... les premiers membres des équations cartésiennes de ces surfaces.

Il résulte des considérations précédentes que l'équation de la surface S est de la forme

$$Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma - \Sigma_3^2 = 0.$$

Génération géométrique de la surface S.

25. En dehors des trois quadriques Q_α, Q_β, Q_γ, il en existe *quinze* autres également tangentes à la surface le long d'une biquadratique et passant par deux des droites doubles; leur étude conduit à une génération géométrique de la surface S.

Ces quadriques peuvent être dénommées $Q_{\alpha,i}$, $Q_{\beta,i}$, $Q_{\gamma,i}$, les indices α, β, γ correspondant aux droites doubles et les indices i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ aux plans singuliers P_i; si $pp'\delta''$ est le symbole de la fonction ϑ qui définit le plan P_i, la biquadratique $Q_{\alpha,i}$ est définie par l'équation

$$\vartheta_{pp'\alpha''} = 0.$$

On reconnaît aisément au moyen de l'algorithme que la biquadratique $Q_{\alpha,1}$, par exemple, passe par les quatre sommets du tétraèdre P_2, P_3, P_4, P_5, rencontre en outre ces plans aux points doubles $A_{\alpha,2}$, $A_{\alpha,3}$,

$A_{\alpha,4}$, $A_{\alpha,5}$ et qu'elle passe enfin par les deux points doubles $A_{\beta,1}$, $A_{\gamma,1}$ situés dans le plan P_1.

26. On peut considérer le plan P_i et la quadrique $Q_{\alpha,i}$ comme formant une surface cubique dégénérée circonscrite à la surface S. Nous nous proposons de démontrer que les cinq surfaces

$$(P_i, Q_{\alpha,i}) \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

appartiennent à une famille de surfaces cubiques inscrites à la surface S.

A cet effet, remarquons que le produit des quatre fonctions P_1, $Q_{\alpha,1}$, P_2, $Q_{\alpha,2}$ dont les symboles sont respectivement

$$\alpha\gamma'\delta'', \quad \alpha\gamma'\alpha'', \quad \alpha\delta'\delta'', \quad \alpha\delta'\alpha''$$

est une fonction paire et de caractéristique nulle; de plus il admet les demi-périodes p_β, p_γ comme zéros d'ordre quatre et p_α comme zéro d'ordre deux. D'autre part, le produit $F_\beta F_\gamma$ est, sur la surface, une fonction thêta, paire, d'ordre deux et de caractéristique nulle, admettant p_α comme zéro d'ordre quatre et p_β, p_γ comme zéros d'ordre deux. On en déduit par un raisonnement employé déjà à plusieurs reprises que l'équation

$$P_1 Q_{\alpha,1} P_2 Q_{\alpha,2} F_\beta F_\gamma = 0$$

représente l'intersection complète de la surface S par une surface cubique T_3 et, par suite, que l'équation de la surface S est de la forme

$$(E) \qquad S = (P_1 Q_{\alpha,1})(P_2 Q_{\alpha,2}) - T_3^2 = 0,$$

en désignant par $P_1 = 0$, ..., $T_3 = 0$ les équations cartésiennes des surfaces correspondantes.

Cette équation met en évidence que la *surface* S *est l'enveloppe de la famille de surfaces cubiques*

$$(\alpha) \qquad \Sigma_\alpha = \rho^2(P_1 Q_{\alpha,1}) + 2\rho T_3 + (P_2 Q_{\alpha,2}) = 0,$$

ρ désignant un paramètre variable. Il existe trois familles analogues Σ_α, Σ_β, Σ_γ.

La famille des surfaces cubiques inscrites Σ_α comprend comme dégénérescences les cinq surfaces formées respectivement du plan P_i et de la quadrique $Q_{\alpha,i}$.

L'équation abélienne de la courbe de contact de la surface Σ_α est

$$\rho \mathfrak{S}_{\alpha\gamma'\delta''}\mathfrak{S}_{\alpha\gamma'\alpha''} + \mathfrak{S}_{\alpha\delta'\delta''}\mathfrak{S}_{\alpha\delta'\alpha''} = 0.$$

27. De l'équation (E) on peut déduire des conséquences géométriques. La surface T_3 contient les droites doubles D_β, D_γ, mais non la droite D_α; elle coupe donc celle-ci en deux points m et n en dehors du point triple de la surface S. D'après l'équation (E) ces points m, n coïncident avec les points d'intersection de D_α avec les plans P_1, P_2 et les quadriques $Q_{\alpha,1}$, $Q_{\alpha,2}$; d'après des considérations de symétrie, l'un de ces points appartient à P_1 et $Q_{\alpha,1}$ et l'autre à P_2 et $Q_{\alpha,2}$.

Ceci posé, soit Σ_α une surface cubique quelconque de la famille (α); l'équation de la surface S peut se mettre sous la forme

$$S \equiv (P_1 Q_{\alpha,1})\Sigma_\alpha - T_3'^2 = 0.$$

La surface cubique T_3' rencontre la droite D_α au point triple, au point m et en un troisième point s. Il résulte de l'identité précédente que la surface Σ_α a un point double en s.

En résumé, la surface cubique variable Σ_α est définie par les conditions suivantes : elle contient les droites D_β, D_γ, elle passe par les dix sommets du pentaèdre $P_1 P_2 \ldots P_5$ (car chacune des surfaces décomposées $P_i Q_{\alpha,i}$ passe par ces dix sommets); enfin, elle possède un point double situé sur la droite D_α. Bien qu'assujettie à dix-neuf conditions, elle dépend d'un paramètre, ce qui constitue un théorème :

Étant donnés huit plans de Lamé $P_1, \ldots, P_5$, Π_α, Π_β, Π_γ, *il existe une surface cubique, passant par les dix sommets du pentaèdre* $P_1, \ldots, P_5$, *contenant deux des arêtes du trièdre* Π_α, Π_β, Π_γ *et admettant pour point double un point quelconque s de la troisième arête* D; *quand le point s décrit cette arête, la surface cubique enveloppe la surface du sixième ordre* S *déterminée par le groupe de Lamé. Cette surface admet trois générations analogues.*

28. Ce théorème conduit à une forme élégante de l'équation de la

surface S. Remarquons que la donnée des huit plans $P_1, \ldots, P_5$, Π_α, Π_β, Π_γ définit la quadrique $Q_{\alpha,i}$ par des conditions linéaires (car elle doit passer par les sommets du tétraèdre des quatre plans P autres que P_i et contenir les deux droites D_β, D_γ). Ceci posé, si l'on désigne par $F(X, Y, Z)$ le polynome

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2YZ - 2ZX - 2XY,$$

l'équation de la surface peut se mettre sous la forme

$$F[(P_i Q_{\alpha,i}), (P_j Q_{\alpha,j}), (P_k Q_{\alpha,k})] = 0.$$

Il existe trente formes analogues.

29. Voici une dernière conséquence du théorème précédent. La surface inscrite variable Σ_α coupe le plan P_i suivant une cubique qui passe par huit points fixes ; à savoir les traces des droites D_β, D_γ et les six sommets du quadrilatère complet découpé par les quatre autres plans singuliers. Elle passe donc par un neuvième point qui n'est autre que le point double $A_{\alpha,i}$; de là une définition simple des points doubles A : le point $A_{\alpha,i}$ forme avec les traces, sur le plan P_i, des deux droites doubles D_β, D_γ et des six droites d'intersection des plans singuliers autres que P_i un groupe de neuf points bases d'un faisceau de cubiques.

Surfaces adjointes d'ordre trois et d'ordre quatre circonscrites à S.

30. On reconnaît au moyen de l'algorithme qu'il existe *trente* fonctions thêta du premier ordre s'annulant pour une des trois demi-périodes p_α, p_β, p_γ ; elles définissent sur la surface S des courbes gauches de degré cinq et de genre un. Considérons l'une de ces fonctions, $\vartheta_{\alpha\alpha'\alpha''}$ par exemple, qui s'annule pour la demi-période $(\alpha\alpha'\alpha'')$ ou p_α. Le produit

$$(\vartheta_{\alpha\alpha'\alpha''})^2 F_\alpha^2 F_\beta F_\gamma$$

est une fonction thêta d'ordre six, de caractéristique nulle, paire, admettant les trois demi-périodes p_α, p_β, p_γ pour zéros d'ordre six,

et l'on en conclut que l'on peut circonscrire à la surface S, le long de la quintique $\Im_{\alpha\alpha'\alpha''}=0$, une surface cubique adjointe admettant D_α comme droite double.

Ces trente surfaces cubiques font partie de trente familles de surfaces cubiques inscrites qui se déduisent très simplement des trois familles Σ_α, Σ_β, Σ_γ précédemment définies. D'après l'équation

$$\text{(E)} \qquad S \equiv (P_i Q_{\alpha,i})(P_k Q_{\alpha,k}) - T_3^2 = 0,$$

on peut considérer la surface S comme l'enveloppe de la famille de surfaces cubiques

$$\rho^2(P_i Q_{\alpha,k}) + 2\rho T_3 + (P_k Q_{\alpha,i}) = 0.$$

On définit par cette voie trente familles analogues. Pour démontrer que les trente surfaces cubiques adjointes appartiennent respectivement à ces trente familles, il suffit de vérifier, par exemple, que le produit $(\Im_{\alpha\alpha'\alpha''}F_\alpha)$ a même caractéristique et même parité que les produits $(P_1 Q_{\alpha,2})$ et $(P_2 Q_{\alpha,1})$ et qu'il s'annule au même ordre de multiplicité pour les demi-périodes p_α, p_β, p_γ; c'est ce qu'on vérifie aisément en vertu des symboles de ces fonctions

$$P_1 \;:\; \alpha\gamma'\delta'', \qquad P_2 \;:\; \alpha\delta'\delta'',$$
$$Q_{\alpha,1} : \alpha\gamma'\alpha'', \qquad Q_{\alpha,2} : \alpha\delta'\alpha'';$$

d'autre part F_α est de même caractéristique que $\Im_{\alpha\beta'\delta''}$ et de parité contraire.

51. Enfin les *dix* fonctions thêta du premier ordre qu'il nous reste à considérer ne s'annulent pour aucune des trois demi-périodes p; elles définissent sur la surface des courbes gauches de degré six et de genre un. Soit $\Im_{\alpha\alpha'\delta''}$ l'une de ces fonctions, l'équation

$$(\Im_{\alpha\alpha'\delta''})^2 F_\alpha^2 F_\beta^2 F_\gamma^2 = 0$$

représente l'intersection complète de S par une surface adjointe d'ordre quatre admettant les droites D_α, D_β, D_γ pour droites doubles.

Donc *il existe dix surfaces de Steiner adjointes à* S *et circonscrites à* S *le long d'une courbe gauche du sixième ordre.*

On reconnaît que ces dix surfaces correspondent aux combinaisons deux à deux des cinq plans tangents singuliers P_i; la surface (i, j) contient douze points doubles de la surface : à savoir les traces sur les plans P_i, P_j des arêtes du trièdre formé par les trois autres plans singuliers et les six points doubles A contenus dans les plans P_i, P_j.

Sections de la surface S par les surfaces adjointes.

32. La représentation paramétrique au moyen des fonctions abéliennes permet d'étudier assez simplement les courbes découpées sur la surface S par les surfaces adjointes d'ordre n.

Nous admettrons désormais pour fixer les idées que la fonction désignée jusqu'ici par $\vartheta(u, v, w)$ est la fonction thêta normale d'ordre un, de caractéristique nulle (cette fonction est paire).

Soit $\Sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ l'équation algébrique d'une surface adjointe d'ordre n et désignons par $\Sigma(u, v, w)$ ce que devient $\Sigma(x_1, \ldots, x_4)$ lorsqu'on y remplace $x_1, \ldots, x_4$ par leurs expressions en u, v, w

$$x_1 = F_\beta F_\gamma, \qquad x_2 = F_\gamma F_\alpha, \qquad x_3 = F_\alpha F_\beta, \qquad x_4 = \Theta_4.$$

$\Sigma(u, v, w)$ est [du moins lorsqu'on suppose $\vartheta(u, v, w) = 0$] une fonction thêta paire d'ordre $2n$, de caractéristique nulle et s'annulant à l'ordre $2n$ pour les trois demi-périodes p_α, p_β, p_γ. De plus, comme la surface $\Sigma(x, \ldots, x_4) = 0$ passe, par hypothèse, par les trois droites doubles D_α, D_β, D_γ, $\Sigma(u, v, w)$ contient en facteur le produit $F_\alpha F_\beta F_\gamma$, en sorte que

$$\Sigma(u, v, w) = F_\alpha F_\beta F_\gamma \, \sigma(u, v, w).$$

D'après cette relation même, $\sigma(u, v, w)$ est une fonction thêta impaire de caractéristique nulle, d'ordre $2n - 3$, admettant p_α, p_β, p_γ pour zéros d'ordre $2n - 4$.

Réciproquement, toute équation $\sigma(u, v, w) = 0$ de ce type définit l'intersection de la surface S par une surface adjointe d'ordre n. En effet, le polynome général $\Sigma(x_1, \ldots, x_4)$ homogène d'ordre n dépend de $\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)$ constantes; la condition de contenir les

trois droites doubles de la surface S impose $3n+1$ conditions linéaires; enfin, si l'on désigne par $S(x_1, \ldots, x_4) = 0$ l'équation de la surface S, tout polynome de la forme

$$\Sigma = S(x_1, \ldots, x_4) K(x_1, \ldots, x_4),$$

K désignant un polynome d'ordre $n-6$, est identiquement nul sur la surface. En résumé, l'équation de la surface adjointe la plus générale d'ordre n dépend d'un nombre de paramètres homogènes égal à

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} - \frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{6} - (3n+1) \\ &= 3n^2 - 9n + 10.\end{aligned}$$

Évaluons, d'autre part, le nombre des fonctions $\sigma(u, v, w)$ linéairement distinctes et non identiquement nulles sur la surface S. Les fonctions thêta d'ordre $2n-3$, de caractéristique nulle et impaire, sont au nombre de $\frac{(2n-3)^3-1}{2}$; il faut en déduire les produits de ϑ par les fonctions d'ordre $2n-4$, de caractéristique nulle, impaires, au nombre de $\frac{(2n-4)^3-8}{2}$. Enfin, les fonctions $\sigma(u, v, w)$ doivent s'annuler à l'ordre $2n-4$ pour p_α, p_β, p_γ, ce qui impose $3(n-2)^2$ conditions linéaires. Le nombre des fonctions $\sigma(u, v, w)$ est donc

$$\psi(n) = \frac{(2n-3)^3-1}{2} - \frac{(2n-4)^3-8}{2} - 3(n-2)^2 = 3n^2 - 9n + 10.$$

L'égalité de $\varphi(n)$ et de $\psi(n)$ établit la réciproque annoncée. Donc :

Les courbes découpées sur la surface S *par ses adjointes d'ordre n ont pour équation générale* $\sigma(u, v, w) = 0$, *en désignant par* $\sigma(u, v, w)$ *une fonction normale d'ordre* $2n-3$, *de caractéristique nulle, impaire et admettant les demi-périodes* p_α, p_β, p_γ *pour zéros d'ordre* $2n-4$, *et réciproquement.*

35. En particulier, on peut supposer que $\sigma(u, v, w)$ est de la forme suivante :

$$\sigma(u, v, w) = F_\alpha^h F_\beta^k F_\gamma^l \tau(u, v, w).$$

Dans ce cas, l'équation $\tau(u, v, w) = 0$ définit l'intersection de S par une surface adjointe qui admet respectivement les droites D_α, D_β, D_γ comme droites multiples d'ordre $h+1$, $k+1$, $l+1$.

Nous considérerons spécialement les surfaces adjointes d'ordre $2n$ qui admettent les droites D_α, D_β, D_γ comme droites multiples d'ordre n. Voici le résultat :

Les courbes C_n *découpées sur la surface* S *par les surfaces adjointes d'ordre* $2n$ *qui admettent les droites doubles de la surface pour droites multiples d'ordre n ont pour équation générale* $\varphi_n(u, v, w) = 0$ *en désignant par* $\varphi_n(u, v, w)$ *une fonction normale quelconque d'ordre n, de caractéristique nulle et de même parité que le nombre n, et réciproquement.*

Sur le genre des courbes tracées sur la surface S.

54. Nous n'étudierons le genre des courbes tracées sur la surface que dans le cas particulier des courbes C_n, cas qui conduit aux résultats les plus simples.

Soit $\varphi(u, v, w) = 0$ l'équation d'une courbe C et désignons par X, Y, Z les coordonnées cartésiennes non homogènes d'un point de la courbe.

Nous chercherons tout d'abord à former *a priori* une différentielle abélienne de première espèce attachée à la courbe C. Soit $\chi(u, v, w)$ une fonction normale de même ordre, de même caractéristique et de même parité que $\varphi(u, v, w)$ et considérons l'intégrale

$$I = \int \frac{\chi(u, v, w)\dfrac{\partial\varpi}{\partial w}}{J(u, v, w)}\,du,$$

en posant

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varpi}{\partial v} & \dfrac{\partial\varpi}{\partial w} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Cette intégrale est une intégrale abélienne attachée à la courbe C;

en effet, on a sur cette courbe

$$\begin{aligned} dX &= \frac{\partial X}{\partial u} du + \frac{\partial X}{\partial v} dv + \frac{\partial X}{\partial w} dw, \\ 0 &= \frac{\partial \xi}{\partial u} du + \frac{\partial \xi}{\partial v} dv + \frac{\partial \xi}{\partial w} dw, \\ 0 &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv + \frac{\partial \varphi}{\partial w} dw; \end{aligned}$$

d'où

$$J(u, v, w)\, dX = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial X}{\partial w} \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial v} & \frac{\partial \xi}{\partial w} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial w} \end{vmatrix} du.$$

Dès lors, l'intégrale I peut s'écrire

$$I = \int \frac{\chi(u, v, w)\, dX}{\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial X}{\partial w} \\ \frac{\frac{\partial \xi}{\partial u}}{\frac{\partial \xi}{\partial w}} & \frac{\frac{\partial \xi}{\partial v}}{\frac{\partial \xi}{\partial w}} & 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial w} \end{vmatrix}}.$$

Le dénominateur est de la forme

$$A \frac{\partial \varphi}{\partial u} + B \frac{\partial \varphi}{\partial v} + C \frac{\partial \varphi}{\partial w},$$

A, B, C étant sur la courbe des fonctions abéliennes impaires de u, v, w, et l'intégrale I peut se mettre sous la forme

$$I = \int \frac{dX}{A \left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \chi - \frac{\partial \chi}{\partial u} \varphi}{\chi^2} \right) + \dots},$$

puisque $\varphi(u, v, w) = 0$ sur la courbe C, ou enfin

$$I = \int \frac{dX}{A\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varphi}{\chi}\right) + B\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\varphi}{\chi}\right) + C\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\varphi}{\chi}\right)}.$$

Cette forme met en évidence que le coefficient de dX est une fonction abélienne *paire* de u, v, w, donc une fonction rationnelle de X, Y, Z.

L'intégrale I est donc une intégrale abélienne appartenant à la courbe C et il en serait de même plus généralement de l'intégrale

$$I' = \int \frac{\psi(u, v, w)}{J(u, v, w)} du,$$

$\psi(u, v, w)$ désignant une fonction normale d'ordre $n+1$, de caractéristique nulle, mais de parité contraire à $\varphi(u, v, w)$, car le quotient

$$\frac{\psi}{\chi\frac{\partial\Im}{\partial w}}$$

est une fonction abélienne paire sur la surface S.

L'intégrale I' est de *première espèce :* en effet, u, v, w restent finis sur la courbe, dès lors l'intégrale ne saurait devenir infinie que dans le cas où $J(u, v, w)$ s'annule. Or, en vertu des équations

$$\Im(u, v, w) = 0,$$
$$\varphi(u, v, w) = 0,$$

on a sur la courbe

$$\frac{du}{\frac{D(\Im, \varphi)}{D(v, w)}} = \frac{dv}{\frac{D(\Im, \varphi)}{D(w, u)}} = \frac{dw}{\frac{D(\Im, \varphi)}{D(u, v)}}.$$

On en déduit que l'intégrale ne peut devenir infinie que pour des valeurs u, v, w annulant à la fois $\Im$, φ et les trois déterminants fonctionnels : un tel système définit un point double sur la courbe. Or la courbe générale d'une série linéaire C ne peut avoir de point double

variable que sur la courbe double de la surface S, ce qui n'a pas lieu pour les courbes C_n, et, d'autre part, elles ne passent par aucun point fixe.

L'intégrale V' *est donc une intégrale abélienne de première espèce pour la courbe générale* C_n.

35. Combien cette forme donne-t-elle d'intégrales linéairement distinctes? Pour fixer les idées, supposons n pair, la démonstration serait d'ailleurs analogue pour n impair. Dans ce cas, les fonctions $\psi(u, v, w)$ d'ordre $n+1$, de caractéristique nulle et impaires, non identiquement nulles sur la surface, sont au nombre de

$$\frac{(n+1)^3-1}{2}-\frac{n^3-8}{2}=\frac{3n(n+1)}{2}+4;$$

mais parmi ces fonctions il en est trois identiquement nulles le long de la courbe : à savoir

$$\varphi\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial u},\quad \varphi\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial v},\quad \varphi\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial w}.$$

La formule donne donc

$$\mathrm{N}=\frac{3n(n+1)}{2}+1$$

intégrales distinctes de première espèce.

On peut démontrer que ce sont bien là *toutes* les intégrales de première espèce de la courbe. D'après un théorème connu de M. Nöther, si l'on désigne par ν le nombre des points d'intersection variables de la courbe avec une de ses surfaces adjointes et par p le genre de cette courbe :

$$\nu=2(p-1).$$

Au cas actuel, ce nombre ν est le nombre des points d'intersection variables des courbes $\varphi=0$, $\chi=0$, ou encore la moitié du nombre des solutions communes aux équations

$$\varphi=0,\qquad \chi=0,\qquad \mathfrak{S}=0,$$

c'est-à-dire $\frac{6n(n+1)}{2}$; d'ailleurs ces équations n'ont aucune solution

commune fixe. Dès lors

$$p = \frac{3n(n+1)}{2} + 1 = N. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous parvenons donc au théorème suivant :

La courbe générale C_n, *d'équation* $\varphi_n(u, v, w) = 0$, *découpée sur la surface* S *par une surface adjointe d'ordre* $2n$, *admettant les trois droites doubles de* S *comme droites multiples d'ordre* n, *est de genre*

$$p = \frac{3n(n+1)}{2} + 1$$

et ses intégrales abéliennes de première espèce sont de la forme

$$\int \frac{\varphi_{n+1}(u, v, w)}{\frac{D(\mathfrak{S}, \varphi)}{D(v, w)}} du,$$

en désignant par $\varphi_{n+1}(u, v, w)$ *une fonction normale quelconque d'ordre* $n+1$, *de caractéristique nulle et de même parité que le nombre* $n+1$.

En d'autres termes, la courbe générale C_{n+1} découpe sur une courbe C_n quelconque le groupe canonique de points G_{2p-2} le plus général.

Le cas où $n = 1$ correspond aux courbes L du système canonique; la formule $p = \frac{3n(n+1)}{2} + 1$ donne alors $p = 4$, ce que nous avions déjà établi. De plus, le groupe canonique G_{2p-2} est découpé sur la courbe L générale par les surfaces de Steiner qui admettent les mêmes droites doubles que la surface S considérée.

Le théorème précédent s'étend à toute surface S :

Sur toute surface S, *l'équation* $\varphi_n(u, v, w) = 0$, *où* φ_n *désigne la fonction thêta générale d'ordre* n, *de caractéristique nulle et de*

même parité que le nombre n, définit un système linéaire de courbes C_n qui jouit des propriétés suivantes :

Il dépend de $\frac{3n(n-1)}{2}+3$ *paramètres* [1], *son degré est égal à* $3n^2$ *et le genre de la courbe générale est égal à* $\frac{3n(n+1)}{2}+1$. *Enfin, les courbes C_{n+1} découpent sur toute courbe C_n le groupe canonique de points G_{2p-2} le plus général.*

---

(1) Cette expression n'est pas valable pour $n=1$.

Sur la généralisation des séries trigonométriques;

PAR M. A. BUHL,
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier.

Objet du Mémoire. — Les travaux sur les fonctions de variables réelles dont l'origine remonte au célèbre théorème de Weierstrass sur la représentation d'une fonction continue par une série de polynomes ont conduit à étudier des développements susceptibles de représenter, d'une infinité de manières différentes, des fonctions données dans un intervalle donné. Ainsi les séries de polynomes que l'on sait former à l'heure actuelle par un nombre considérable de procédés contiennent, en général, une infinité de constantes arbitraires équivalant à une ou plusieurs fonctions arbitraires [1].

Dans un ordre d'idées assez différent au premier abord et tout au moins beaucoup plus ancien, on peut représenter des fonctions données dans un intervalle où elles satisfont à des conditions assez générales telles que celles de Dirichlet, par des séries de fonctions continues telles que les séries trigonométriques, ce qui, au point de vue théorique pur, suffit pour qu'on puisse affirmer qu'il existe, pour ces mêmes fonctions, une infinité d'autres développements en séries de fonctions continues.

---

[1] Je suis revenu sur ce caractère d'indétermination dans une Note aux *Comptes rendus* en date du 23 janvier 1905. Quant aux recherches du présent Mémoire, elles ont donné lieu aux Notes des 7 mai, 16 juillet et 24 septembre 1906.

Mais cependant, si l'on construit une série trigonométrique représentant une fonction bien déterminée, on se trouve en présence d'un développement qui ne comporte, par lui-même, absolument rien d'arbitraire. Aurait-on pu le former différemment? Pourrait-on mettre en évidence une opération simple et *immédiate* le transformant en d'autres développements en nombre infini et qui tous, cependant, représenteraient bien la même fonction primitivement donnée et toujours dans le même intervalle?

Telles sont les questions que je me suis posées et qui me paraissent recevoir dans ce Mémoire des réponses suffisamment complètes et curieuses par plus d'un côté.

Je crois d'abord que, toutes les fois que l'on cherchera à représenter une fonction réelle $f(x)$ au moyen des signes de l'Analyse, on donnera naissance à un problème de *prolongement*. Si l'on considère la fonction *elle-même*, bien définie dans un certain intervalle α mais non hors de celui-ci, il est clair que dans ce domaine extérieur β on pourra la continuer absolument au hasard; mais, si l'on considère une *représentation* de cette fonction, les symboles employés pourront garder une signification précise même lorsque la variable x ne sera plus dans α et donner dans β un prolongement dont l'arbitraire pourra être diminué jusqu'au point de disparaître totalement. C'est ainsi qu'une fonction développée en série trigonométrique est reproduite identiquement dans tous les intervalles identiques à celui où elle est d'abord définie et qui précèdent ou suivent celui-ci.

On comprend alors que l'étude d'une représentation n'est complète que lorsqu'elle est faite non seulement dans l'intervalle particulier où l'on peut spécialement en avoir besoin, mais dans tout le domaine extérieur.

C'est ainsi que je suis amené à montrer qu'on peut former des séries plus générales que les séries trigonométriques, séries qui contiennent un paramètre arbitraire ψ, qui représentent $f(x)$ dans un premier intervalle, puis cette fonction multipliée par $\cos\psi$, $\cos 2\psi$, ... ou par $\sin\psi$, $\sin 2\psi$, ... dans les intervalles suivant le premier et d'étendue identique. Si l'on multiplie de telles séries par une fonction arbitraire de x et de ψ, puis par $d\psi$ et que l'on intègre, on aura de nouvelles séries représentant toujours $f(x)$ dans le premier intervalle, mais des

transformations données à l'avance de cette fonction dans tous les autres.

De remarquables considérations se greffent sur ces idées générales.

Tout d'abord, le procédé de génération étudié au Chapitre I donne naissance à des séries (A), (B), (C), (D_1) et (D_2) non distinctes au fond, ce qui fait que dans la suite je me borne à considérer l'un de ces types, à savoir le type (B). Leur comparaison est cependant intéressante et pourrait servir à la classification des séries trigonométriques.

Un des points les plus curieux du Chapitre II provient de ce que les coefficients d'une série (B) se laissent rassembler en séries de formes quadratiques que l'on peut facilement sommer, tout comme dans le cas des séries de Fourier [formules (H) et (H')].

Dans ce dernier cas, on ne peut obtenir que des séries arithmétiques, puisque les coefficients ne sont que des nombres. Dans le cas des séries (B), au contraire, les coefficients contiennent ψ et l'on obtient des développements où ψ peut jouer jusqu'au rôle d'une variable complexe. On retrouve ainsi des séries de fractions rationnelles, des relations entre ces séries, etc.

Je montre, d'autre part, que les séries trigonométriques généralisées sont sommables par le procédé de Cesàro, déjà appliqué aux séries de Fourier par M. Fejér. On conclut de là qu'un des développements considérés n'est cependant pas encore complètement caractérisé par le fait que la fonction qu'il représente est assujettie à des conditions données dans une infinité d'intervalles. Ainsi, la reproduction périodique de $f(x)$ ne caractérise pas une série de Fourier [1].

Je mentionne, en terminant ces préliminaires, que je ne me suis nullement préoccupé, quant à tous les résultats obtenus, des conditions de validité les plus générales. J'ai supposé que les fonctions considérées satisfaisaient toujours aux conditions de Dirichlet, bien qu'ayant constaté maintes fois la possibilité d'hypothèses moins restrictives. Je ferai remarquer aussi que tout le Mémoire repose sur la considération préliminaire de séries, dont les termes sont formés de sinus et de cosinus, c'est-à-dire de fonctions satisfaisant à des équations différentielles linéaires *à coefficients constants*. L'étude du cas des coefficients va-

---

[1] *Voir* la note placée à la fin du Mémoire.

riables est tout indiquée par cette remarque et donnerait, sans doute, des résultats plus généraux encore qui s'ajouteraient de façon intéressante à ceux récemment obtenus, quoique dans un ordre d'idées un peu différent, par MM. Stekloff, Kneser et Fredholm. Pour l'instant, je me suis borné au premier cas, dont on pouvait plus aisément poursuivre de nombreuses conséquences.

CHAPITRE I.

FORMATION DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES GÉNÉRALISÉES DANS UN INTERVALLE DONNÉ.

1. Je me propose d'indiquer tout d'abord un procédé de formation des séries trigonométriques qui nous conduira non pas seulement à la série de Fourier, mais aux différentes formes qui se présentent dans des applications très diverses. On remarquera que le raisonnement suivant, loin d'être plus compliqué que le raisonnement classique qui sert à établir formellement la série de Fourier, est, au contraire, plus simple tout en étant plus général. Il ne nécessite même pas l'écriture explicite d'intégrales définies portant sur des produits de sinus ou de cosinus, et je ramène cette partie du raisonnement à une identité entre intégrales, laquelle se vérifie immédiatement et sans aucun calcul.

Soient des fonctions v et u de la variable x et du paramètre k, fonctions définies par le système d'équations simultanées

$$(1) \qquad \frac{dv}{dx} = -ku, \qquad \frac{du}{dx} = kv;$$

d'où l'on tire immédiatement

$$(2) \qquad v = \text{A}\cos(kx - \theta), \qquad u = \text{A}\sin(kx - \theta),$$

θ étant un paramètre arbitraire de même nature que k.

Supposons que k et θ puissent prendre une infinité de valeurs associées k_ν et θ_ν, ν étant un entier variant de $-\infty$ à $+\infty$; on aura identi-

quement (¹)

$$(3)\quad \begin{cases} k_\nu \displaystyle\int_\alpha^\beta v_\mu v_\nu\,dx - k_\mu \int_\alpha^\beta u_\nu u_\mu\,dx = (u_\nu v_\mu)_\alpha^\beta, \\ k_\mu \displaystyle\int_\alpha^\beta v_\nu v_\mu\,dx - k_\nu \int_\alpha^\beta u_\mu u_\nu\,dx = (u_\mu v_\nu)_\alpha^\beta. \end{cases}$$

Si les seconds membres de ces égalités sont toujours nuls quels que soient μ et ν, on conclut alors que les intégrales définies

$$\int_\alpha^\beta v_\mu v_\nu\,dx, \quad \int_\alpha^\beta u_\mu u_\nu\,dx$$

sont identiquement nulles si $\mu \neq \nu$, et non nulles mais égales entre elles si $\mu = \nu$.

La condition $(u_\nu v_\mu)_\alpha^\beta = 0$ s'écrit plus explicitement

$$(4)\quad \frac{u_\nu(\alpha)}{u_\nu(\beta)} = \frac{v_\mu(\beta)}{v_\mu(\alpha)} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin(k_\nu\alpha - \theta_\nu)}{\sin(k_\nu\beta - \theta_\nu)} = \frac{\cos(k_\mu\beta - \theta_\mu)}{\cos(k_\mu\alpha - \theta_\mu)}.$$

Or, une telle égalité ne peut avoir lieu, quels que soient μ et ν, que si ses deux membres sont indépendants des indices en question. Pour l'instant j'attribue à chacun de ces membres une valeur purement constante $\operatorname{tang}\varphi$.

Les équations

$$\frac{\sin(k_\nu\alpha - \theta_\nu)}{\sin(k_\nu\beta - \theta_\nu)} = \operatorname{tang}\varphi, \qquad \frac{\cos(k_\nu\beta - \theta_\nu)}{\cos(k_\nu\alpha - \theta_\nu)} = \operatorname{tang}\varphi$$

donnent alors effectivement une infinité de valeurs k_ν et θ_ν. On en tire, en effet,

$$\sin 2(k_\nu\alpha - \theta_\nu) = \sin 2(k_\nu\beta - \theta_\nu), \qquad \cos k_\nu(\beta - \alpha) = \sin 2\varphi,$$

(¹) Et, en effet, sans aucun calcul. Il suffit de remarquer que $k_\nu v_\nu dx = du$ et que $-k_\mu u_\mu dx = dv_\mu$.

la seconde équation s'obtenant par élimination de θ_ν, et finalement

$$(5)\quad k_\nu = \frac{2\nu\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right)}{\beta - \alpha}, \qquad \theta_\nu = \left[\nu\pi \pm \left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\right]\frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha} - \frac{2\lambda + 1}{4}\pi,$$

λ étant un paramètre entier que l'on peut supposer choisi une fois pour toutes.

Ceci posé, soit une fonction $f(x)$ qui, dans l'intervalle réel α, β, est supposée satisfaire aux conditions de Dirichlet et imaginons que l'on tente de la développer en séries de la forme

$$(6)\quad \begin{cases} f(x) = \ldots + a_{-1}\cos(k_{-1}x - \theta_{-1}) + a_0\cos(k_0 x - \theta_0) \\ \qquad\qquad + a_1\cos(k_1 x - \theta_1) + \ldots, \\ f(x) = \ldots + b_{-1}\sin(k_{-1}x - \theta_{-1}) + b_0\sin(k_0 x - \theta_0) \\ \qquad\qquad + b_1\sin(k_1 x - \theta_1) + \ldots \end{cases}$$

Le raisonnement habituel nous donnera alors

$$(\mathrm{A})\quad f(x) = \frac{2}{\beta - \alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} {\cos \atop \sin}(k_\nu x - \theta_\nu)\int_\alpha^\beta f(\xi)\,{\cos \atop \sin}(k_\nu \xi - \theta_\nu)\,d\xi.$$

C'est là le *premier type* des formules qui seront étudiées dans ce Mémoire. Ce type contient le paramètre arbitraire φ. Observons aussi que les deux développements (A) ne sont pas distincts au fond. Ils se permutent lorsqu'on change la valeur de l'entier λ qui figure dans θ_ν, mais il y a néanmoins grand avantage, au point de vue de la symétrie, à les conserver tous deux.

2. L'étude directe des développements (A) serait moins commode que celle de deux autres que nous en conclurons immédiatement par addition et soustraction, savoir :

$$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_\alpha^\beta f(\xi)\cos k_\nu(x - \xi)\,d\xi,$$

$$0 = \frac{1}{\beta - \alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_\alpha^\beta f(\xi)\sin k_\nu(x' - \xi)\,d\xi.$$

La première formule est évidente. Quant à la seconde, après soustraction des formules (A), elle doit contenir le cosinus de

$$k_\nu(x+\xi) - 2\theta_\nu = k_\nu(x+\xi) - k_\nu(\beta+\alpha) + (2\lambda+1)\frac{\pi}{2}$$
$$= \lambda\pi + \frac{\pi}{2} - k_\nu(\beta+\alpha-x-\xi),$$

ce qui est bien le sinus de $k_\nu(x'-\xi)$, si l'on pose

$$x' = \beta+\alpha-x.$$

Ici x' a une signification géométrique remarquable. C'est le point symétrique de x par rapport au milieu de l'intervalle α, β.

Et comme x' est alors toujours dans α, β en même temps que x, la première formule obtenue est aussi bien valable si l'on y remplace x par x'.

De même la seconde subsiste aussi si l'on y remplace x' par x.

En résumé, on peut écrire

$$\text{(B)} \quad \left.\begin{matrix} f(x) \\ 0 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_\alpha^\beta f(\xi)\,{\cos \atop \sin}\,k_\nu(x-\xi)\,d\xi, \qquad k_\nu = \frac{2\nu\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right)}{\beta-\alpha}.$$

C'est là un *second type* de formules. Ce type est beaucoup plus rapproché que le premier (A) de formules habituelles. Les θ_ν ont disparu et avec eux l'entier λ. Il reste le paramètre arbitraire φ dans k_ν. Pour $4\varphi = \pi$ on retrouve la formule de Fourier.

2 *bis*. L'examen des formules (A) conduit à se demander ce que peuvent représenter les formules

$$\mathrm{I} = \frac{2}{\beta-\alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\sin(k_\nu x - \theta_\nu)\int_\alpha^\beta f(\xi)\cos(k_\nu\xi - \theta_\nu)\,d\xi,$$

$$\mathrm{J} = \frac{2}{\beta-\alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\cos(k_\nu x - \theta_\nu)\int_\alpha^\beta f(\xi)\sin(k_\nu\xi - \theta_\nu)\,d\xi.$$

On en conclut

$$\frac{I+J}{2} = \frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_{\alpha}^{\beta} f(\xi)\sin[k_\nu(x+\xi)-2\theta_\nu]\,d\xi,$$

$$\frac{I-J}{2} = \frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_{\alpha}^{\beta} f(\xi)\sin k_\nu(x-\xi)\,d\xi.$$

Or, d'après le paragraphe précédent,

$$\sin[k_\nu(x+\xi)-2\theta_\nu] = (-1)^\lambda \cos k_\nu(x'-\xi).$$

Donc

$$\frac{I+J}{2} = (-1)^\lambda f(x'), \qquad \frac{I-J}{2} = 0, \qquad I = J = (-1)^\lambda f(x').$$

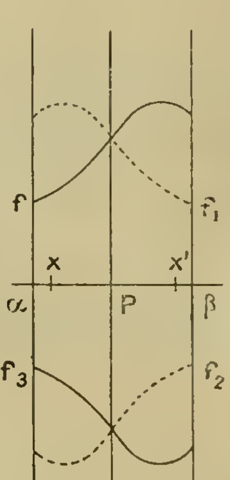
Finalement

$$\text{(C)} \quad (-1)^\lambda f(x') = \frac{2}{\beta-\alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} {}^{\sin}_{\cos}(k_\nu x-\theta_\nu)\int_{\alpha}^{\beta} f(\xi)\,{}^{\cos}_{\sin}(k_\nu\xi-\theta_\nu)\,d\xi.$$

Ce sont des formules d'un *troisième type*. Elles offrent une particularité curieuse.

Représentons-nous géométriquement l'intervalle α, β (*fig.* 1) et la

Fig. 1.



fonction f, comme il est indiqué sur la figure. Considérons aussi le point P milieu de α, β et la droite qui passe par ce point parallèlement à celles qui limitent latéralement l'intervalle considéré.

Ce n'est pas f qui est représentée par le second membre de (C), mais la symétrique f_1 de cette courbe par rapport à la droite P.

Ceci si λ est pair. Si λ est impair, c'est la symétrique f_2 de f_1 par rapport à $\alpha\beta$ ou la symétrique de f par rapport au point P qui est représentée.

Remarquons encore que la formule (C) doit subsister si l'on y permute x et x'. Dans ces conditions, suivant que λ est pair ou impair, c'est f ou la symétrique f_3 de f par rapport à $\alpha\beta$ qui est représentée, mais il faut observer que le point de f ou de f_3 ayant une abscisse x s'obtiendra en mettant dans le second membre de (C) la valeur x' symétrique de x par rapport à P.

5. *Démonstration directe des formules précédentes.* — Tous les résultats obtenus jusqu'ici n'ont qu'un caractère purement formel et ne sont pas mieux démontrés que ne l'est l'ordinaire formule de Fourier tant qu'on n'a pas fait directement la somme de ses termes. C'est cette lacune que nous allons combler. Observons d'abord qu'il est inutile de chercher une démonstration directe de toutes nos formules, car elles se déduisent les unes des autres. Nous nous tiendrons au type (B). Le procédé de sommation de Dirichlet s'étend facilement aux séries de ce type et il nous suffira de commencer le raisonnement.

Je rappelle tout d'abord l'identité

$$\sum_{p=\varpi}^{p=\varpi'} \frac{\cos}{\sin}(a+pr) = \frac{\sin\frac{\varpi'-\varpi+1}{2}r}{\sin\frac{r}{2}} \frac{\cos}{\sin}\left(a+\frac{\varpi+\varpi'}{2}r\right),$$

où ϖ et ϖ' sont des entiers positifs ou négatifs ($\varpi' > \varpi$). Les formules (B) peuvent s'écrire

$$\left.\begin{matrix} f(x) \\ 0 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(\xi)\,d\xi \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{\cos}{\sin}\left[\frac{2\nu\pi \pm \left(\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)}{\beta-\alpha}(x-\xi)\right],$$

et l'on a, d'après l'identité précédente,

$$\sum_{\nu=-\varpi'}^{\nu=+\varpi'} \frac{\cos}{\sin}\left[2\nu\pi \pm \left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right]\frac{x-\xi}{\beta-\alpha} = \frac{\sin\left[(2\varpi'+1)\pi\frac{x-\xi}{\beta-\alpha}\right]}{\sin\pi\frac{x-\xi}{\beta-\alpha}} \frac{\cos}{\sin}\left[\left(\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)\frac{x-\xi}{\beta-\alpha}\right];$$

en posant

$$\pi\frac{x-\xi}{\beta-\alpha}=-\gamma, \qquad \xi=x+\gamma\frac{\beta-\alpha}{\pi}, \qquad d\xi=\frac{\beta-\alpha}{\pi}d\gamma,$$

on voit que le second membre de la formule à démontrer est la limite, pour ϖ' tendant vers l'infini, de

$$\frac{1}{\pi}\int_{\pi\frac{\alpha-x}{\beta-\alpha}}^{\pi\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}}\frac{\sin(2\varpi'+1)\gamma}{\sin\gamma}\frac{\cos}{\sin}\frac{\gamma}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)f\left(x+\gamma\frac{\beta-\alpha}{\pi}\right)d\gamma.$$

Les limites de cette intégrale sont de part et d'autre de zéro. On peut la scinder en deux autres. Dans la première prise de $\pi\frac{\alpha-x}{\beta-\alpha}$ à o, nous changerons γ en $-\gamma$.

Il viendra finalement

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}}\frac{\sin(2\varpi'+1)\gamma}{\sin\gamma}\frac{\cos}{\sin}\left[\frac{\gamma}{\pi}\left(2\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\right]f\left(x-\gamma\frac{\beta-\alpha}{\pi}\right)d\gamma,$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}}\frac{\sin(2\varpi'+1)\gamma}{\sin\gamma}\frac{\cos}{\sin}\left[\frac{\gamma}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)\right]f\left(x+\gamma\frac{\beta-\alpha}{\pi}\right)d\gamma.$$

Nous retombons donc, comme à l'ordinaire, sur des intégrales de la forme

$$J=\int_0^h\frac{\sin(2n+1)\gamma}{\sin\gamma}\psi(\gamma)\,d\gamma,$$

et l'on voit que (*voir* par exemple : E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, 2ᵉ édit., p. 237)

$$\lim_{n=\infty} J=\frac{\pi}{2}\psi(0).$$

Par suite la somme des deux intégrales précédentes se réduit à

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)] \qquad \text{ou à} \qquad 0,$$

suivant que l'on y prend les cosinus ou les sinus.

Cette démonstration est si exactement calquée sur celle habituellement faite pour $\varphi=4\pi$ qu'elle peut paraître superflue. Nous verrons

dans la suite, et particulièrement au paragraphe **5**, qu'elle est indispensable, car elle nous servira dans des cas où φ jouera un tout autre rôle que celui joué jusqu'ici par ce paramètre.

4. *Les séries trigonométriques de M. A. Kneser.* — M. A. Kneser, dans ses *Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik* (*Mathematische Annalen,* Bd. LVIII, 1904) a attiré l'attention sur quatre types de séries trigonométriques. Il est intéressant de voir, ne serait-ce qu'au point de vue de la classification, comment ces types se rattachent à ceux déjà étudiés ici. Ils n'en sont pas tous des cas particuliers, mais plutôt des cas singuliers.

Reprenons l'égalité du paragraphe **1**,

$$(4)\qquad \frac{\sin(k_\nu\alpha-\theta_\nu)}{\sin(k_\nu\beta-\theta_\nu)}=\frac{\cos(k_\mu\beta-\theta_\mu)}{\cos(k_\mu\alpha-\theta_\mu)};$$

on peut y satisfaire autrement qu'en supposant aux deux membres une valeur arbitraire, mais bien déterminée, tang φ. Nous prendrons d'abord pour le premier membre la valeur indéterminée $\frac{0}{0}$, si bien que la valeur du second pourra être quelconque pourvu qu'elle soit finie. Les équations

$$\sin(k\alpha-\theta)=0,\qquad \sin(k\beta-\theta)=0$$

donnent, μ et ν étant des entiers,

$$(k\alpha-\theta)=\mu\pi,\qquad k\beta-\theta=(\nu+\mu)\pi,$$

d'où

$$k=\frac{\nu\pi}{\beta-\alpha},\qquad \theta=\frac{\nu\pi\alpha}{\beta-\alpha}-\mu\pi.$$

Les séries (6) du paragraphe **1** sont alors remplacées par

$$f(x)=\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\begin{matrix}a_\nu\cos\\ b_\nu\sin\end{matrix}\left(\nu\pi\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}+\mu\pi\right).$$

On peut d'abord supprimer $\mu\pi$ dans les parenthèses, car cela revient,

quand μ est impair, à changer les signes des coefficients a_ν ou b_ν non encore déterminés. On peut ensuite rassembler les termes de coefficients a_ν et $a_{-\nu}$ ou b_ν et $b_{-\nu}$, si bien que les séries précédentes doivent être de la forme

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \begin{matrix} a'_\nu \cos \\ b'_\nu \sin \end{matrix} \left(\nu\pi \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right).$$

En déterminant les coefficients par le procédé ordinaire on a finalement les deux formules

$$(\mathrm{D}_1) \begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\beta-\alpha} \displaystyle\int_\alpha^\beta f(\xi)\,d\xi + \dfrac{2}{\beta-\alpha} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \cos\left(\nu\pi \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right) \int_\alpha^\beta f(\xi) \cos\left(\nu\pi \dfrac{\xi-\alpha}{\beta-\alpha}\right) d\xi, \\ f(x) = \dfrac{2}{\beta-\alpha} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \sin\left(\nu\pi \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right) \int_\alpha^\beta f(\xi) \sin\left(\nu\pi \dfrac{\xi-\alpha}{\beta-\alpha}\right) d\xi. \end{cases}$$

Si l'on suppose maintenant que l'on prenne

$$\cos(k\beta - \theta) = 0, \qquad \cos(k\alpha - \theta) = 0,$$

on retrouvera les séries (D_1) dans l'ordre inverse.

Enfin l'égalité (4) est encore satisfaite si l'on égale à zéro les deux numérateurs ou les deux dénominateurs. Soient

$$\sin(k\alpha - \theta) = 0, \qquad \cos(k\beta - \theta) = 0.$$

Un raisonnement semblable au précédent donne alors

$$(\mathrm{D}_2) \quad f(x) = \frac{2}{\beta-\alpha} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \left[\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\pi \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right] \int_\alpha^\beta f(\xi) \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \left[\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\pi \frac{\xi-\alpha}{\beta-\alpha}\right] d\xi.$$

Les quatre séries comprises dans les formules (D_1) et (D_2) sont celles données par M. Kneser à l'endroit cité, avec cette seule différence que les limites α et β y sont respectivement égales à zéro et à π. On voit immédiatement que ces séries ne peuvent pas toutes servir, du moins sous la forme précédente, à la représentation d'une fonction

$f(x)$ quelconque dans α, β.

La seconde série (D_1) exige.... $f(\alpha) = 0$, $f(\beta) = 0$
La première série (D_2) exige.... $f(\alpha) = 0$
La seconde série (D_2) exige.... $f(\beta) = 0$

De plus, ces séries ont le grave inconvénient de ne plus contenir le paramètre arbitraire φ, ce qui les rend impropres au mode de généralisation que nous allons étudier maintenant.

5. *Génération des séries trigonométriques généralisées.* — Reprenons la formule (B) qui est plus facilement maniable que les autres et posons

$$\psi = \pm\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right).$$

Soit de plus une fonction $F(x, \psi)$ existant pour toutes les valeurs réelles de x et pour les valeurs de ψ comprises dans un certain intervalle ψ_0, ψ_1.

Nous supposons toujours les conditions de Dirichlet satisfaites. Pour l'instant, considérons seulement $F(x, \psi)$ lorsque x est dans l'intervalle α, β, ce que nous indiquerons par $F_0(x, \psi)$ lorsque quelque ambiguïté sera à craindre.

Ceci posé, imaginons que l'on multiplie les deux membres de (B) par $F(x, \psi)\,d\psi$, et que l'on intègre par rapport à ψ, de ψ_0 à ψ_1. Le résultat pourra s'écrire

$$(\mathrm{E})\quad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} f(x) \\ 0 \end{array}\right\} = \dfrac{\dfrac{1}{\beta-\alpha}\displaystyle\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\psi_0}^{\psi_1} f(\xi)\,F(x,\psi)\,{\cos \atop \sin}\,k_\nu(x-\xi)\,d\psi\,d\xi}{\displaystyle\int_{\psi_0}^{\psi_1} F(x,\psi)\,d\psi}, \\ k_\nu = \dfrac{2\nu\pi+\psi}{\beta-\alpha}. \end{array}\right.$$

Dans l'intégrale double du numérateur, l'ordre des intégrations est indifférent, puisque les limites des intégrales sont finies.

Le second membre de (E) est ce que nous appellerons une *série trigonométrique généralisée*. On peut démontrer directement la for-

mule (E). Le procédé de formation est légitime, car nous avons intégré terme à terme une série en ψ qui, ainsi que cela a été démontré directement au n° **3**, ne dépend pas de ψ et qui peut, par suite, être considérée comme uniformément convergente par rapport à ce paramètre. Si maintenant nous voulons sommer directement le numérateur du second membre de (E), nous pourrons toujours imaginer que l'on réserve pour la fin des calculs l'intégration par rapport à ψ. En effectuant d'abord la sommation par rapport à ν tout se passera comme au n° **3**, et nous conclurons que le numérateur considéré est égal à

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]\int_{\psi_0}^{\psi_1} F(x,\psi)\,d\psi \quad \text{ou à} \quad 0,$$

suivant qu'on y prend le cosinus ou le sinus.

6. *Remarques sur les développements en séries de fonctions continues.* — On sait que la représentation des fonctions de variables réelles par des développements en séries de fonctions continues a donné lieu, dans ces dernières années, à d'importants travaux dus notamment, en France, à MM. Baire et Lebesgue. M. Baire dit que de telles fonctions sont de classe 1, les fonctions continues étant de classe zéro. De tels développements sont possibles d'une infinité de manières et peuvent notamment prendre la forme de séries de polynomes.

Je n'ai nullement à revenir ici sur la démonstration *abstraite* de ces résultats (*voir* pour cela les *Leçons sur les fonctions de variables réelles* de M. E. Borel), mais, tout au contraire, à faire remarquer que nous avons obtenu des formules *explicites* d'accord avec les théorèmes précités.

Nous sommes partis du développement de $f(x)$ en série (B) de cosinus ou de sinus, c'est-à-dire de fonctions continues très simples, et nous nous sommes élevés ensuite à des développements en série (E) qui, en général, n'auront plus des termes de même nature. Et comme la fonction $F(x, \psi)$ est arbitraire, on voit la vaste indétermination formelle de ces développements. On pourrait même les transformer encore en remarquant que, l'intégration en ψ une fois effectuée, ils dépendront formellement des constantes ψ_0 et ψ_1 ; une nouvelle multi-

plication par une fonction arbitraire contenant ψ_0 et ψ_1, et une nouvelle intégration par rapport à ces paramètres constitueraient une transformation qui se pourrait répéter indéfiniment.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES GÉNÉRALISÉES HORS DE L'INTERVALLE DANS LEQUEL ELLES ONT ÉTÉ FORMÉES.

7. Considérons l'intervalle α, β (toujours au point de vue géométrique précédemment adopté) et tous les intervalles identiques obtenus par une translation faite tout le long de l'axe Ox et dans les deux sens de segments tels que α, β placés bout à bout. Ces intervalles seront

$$\ldots;\ [\alpha-(\beta-\alpha)],\alpha;\ \ \alpha,\beta;\ \ \beta,[\beta+(\beta-\alpha)];\ \ [\beta+(\beta-\alpha)],[\beta+2(\beta-\alpha)];\ \ldots,$$

et, pour plus de commodité, nous ferons correspondre à chacun un simple numéro d'ordre

$$\ldots;\quad -1\quad;\ 0\ ;\quad 1\quad;\quad 2\quad;\ \ldots$$

que nous appellerons le *rang* de l'intervalle.

Si $f(x)$ est donné dans l'intervalle de rang 0 et qu'on y représente cette fonction par une série de Fourier ordinaire, on sait que cette série reproduira identiquement $f(x)$ dans tous les autres intervalles, ce qui est souvent considéré comme une propriété caractéristique des séries de Fourier (à tort, ainsi que nous le verrons plus loin).

Dans un ordre d'idées analogue nous allons essayer de voir ce que les séries du type (E), formées pour l'intervalle de rang 0, représentent dans tous les autres. Le résultat nous éclairera définitivement sur la nature des séries (E) ainsi que sur l'usage qui peut en être fait.

Nous avons dit que $F(x, \psi)$ était supposée définie pour x entre $-\infty$ et $+\infty$. Nous écrirons $F_n(x, \psi)$ lorsque x sera dans l'intervalle de

rang n et aura pour valeur $x + n(\beta - \alpha)$. Ceci posé, essayons de voir directement ce que devient le numérateur du second membre de (E) quand x y est remplacé par $x + n(\beta - \alpha)$. L'argument $k_\nu(x - \xi)$ augmente de

$$k_\nu n(\beta - \alpha) = n(2\nu\pi + \psi) \equiv n\psi$$

et

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[k_\nu(x - \xi) + n\psi] = \begin{cases}\cos k_\nu(x - \xi)\cos n\psi - \sin k_\nu(x - \xi)\sin n\psi\\ \sin k_\nu(x - \xi)\cos n\psi + \cos k_\nu(x - \xi)\sin n\psi\end{cases}.$$

Comme de plus la formule (E) peut être appliquée si l'on y remplace $F(x, \psi)$ par $F(x, \psi)\begin{matrix}\cos n\psi\\ \sin n\psi\end{matrix}$, puisque ces fonctions satisfont ensemble aux conditions de Dirichlet, nous voyons que le numérateur considéré prend d'abord la forme

$$\frac{1}{\beta - \alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_\alpha^\beta\int_{\psi_0}^{\psi_1} f(\xi)\,F_n(x, \psi)\begin{matrix}\cos n\psi\\ \sin n\psi\end{matrix}\cos k_\nu(x - \xi)\,d\psi\,d\xi.$$

Il n'y a pas lieu de se préoccuper de l'expression analogue en $\sin k_\nu(x - \xi)$, car elle est nulle d'après la seconde partie de la formule (E). Et d'après la première partie de (E), l'expression précédente est égale à

$$f(x)\int_{\psi_0}^{\psi_1} F_n(x, \psi)\begin{matrix}\cos n\psi\\ \sin n\psi\end{matrix}\,d\psi.$$

En résumé, nous devons remplacer les formules (E) par les suivantes,

$$(F)\qquad f(x)\frac{\displaystyle\int_{\psi_0}^{\psi_1} F(x, \psi)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\psi\,d\psi}{\displaystyle\int_{\psi_0}^{\psi_1} F(x, \psi)\,d\psi} = \frac{\displaystyle\frac{1}{\beta - \alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_\alpha^\beta\int_{\psi_0}^{\psi_1} f(\xi)F(x, \psi)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} k_\nu(x - \xi)\,d\psi\,d\xi}{\displaystyle\int_{\psi_0}^{\psi_1} F(x, \psi)\,d\psi},$$

dans lesquelles x peut varier de $-\infty$ à $+\infty$ et où il faut prendre n égal au rang de l'intervalle dans lequel se trouve x. Si $n = 0$ on retrouve (E). On aurait pu croire, au premier abord, qu'il y avait une différence profonde entre les deux formules (E), puisque l'une donnait

$f(x)$ et l'autre identiquement zéro; on voit maintenant que ceci est une simple particularité relative à l'intervalle de rang zéro.

8. Les formules (F) vont nous donner avec plus de facilité des résultats importants si nous supposons $\psi_1 - \psi_0 = 2\pi$ ou, plus simplement encore, $\psi_1 = 2\pi$, $\psi_0 = 0$, ce qui n'est pas moins général. Comme, par hypothèse ([1]), $F(x, \psi)$ satisfait aux conditions de Dirichlet aussi bien par rapport à ψ que par rapport à x, nous pouvons poser

$$(1) \quad \begin{cases} F(x, \psi) = \dfrac{A_0(x)}{2} + A_1(x)\cos\psi + A_2(x)\cos 2\psi + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad + B_1(x)\sin\psi + B_2(x)\sin 2\psi + \ldots, \end{cases}$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} F(x, \psi)\cos m\psi\, d\psi = \pi A_m(x), \qquad \int_0^{2\pi} F(x, \psi)\sin m\psi\, d\psi = \pi B_m(x),$$

si bien qu'ici le premier membre de (F) s'écrit

$$(2) \qquad f(x)\frac{A_n(x)}{A_0(x)} \quad \text{ou} \quad f(x)\frac{B_n(x)}{A_0(x)},$$

suivant qu'on prend dans le second le cosinus ou le sinus.

On voit que les séries (F) représentent, dans tous les intervalles de rang positif, la fonction primitive $f(x)$ multipliée par des fonctions de x arbitraires dans chaque intervalle. Dans l'intervalle de rang zéro, $f(x)$ est multipliée soit par la constante 1, soit par la constante zéro, suivant qu'on prend dans (F) les cosinus ou les sinus. Quant à ce qui se passe dans les intervalles de rang négatif, il est facile de voir que, dans l'intervalle de rang $-n$, les multiplicateurs de $f(x)$ du premier

---

([1]) Il est quelque peu superflu de s'embarrasser ici d'hypothèses relatives à $F(x, \psi)$. Tout va se passer comme si l'on voulait développer $F(x, \psi)$ en série trigonométrique double. (*Voir* à ce sujet : E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I, 2e édition, p. 294.)

membre de (F) deviennent

$$\frac{\pm \int_{\psi_0}^{\psi_1} F(-x, \psi) \begin{smallmatrix}\cos \\ \sin\end{smallmatrix} n\psi \, d\psi}{\int_{\psi_0}^{\psi_1} F(-x, \psi) \, d\psi}.$$

D'autre part, on pourra poser

$$F(-x, \psi) = \frac{A_0(-x)}{2} + A_1(-x)\cos\psi + \ldots + B_1(-x)\sin\psi + \ldots,$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} F(-x, \psi) \cos m\psi \, d\psi = \pi A_m(-x),$$

$$\int_0^{2\pi} F(-x, \psi) \sin m\psi \, d\psi = \pi B_m(-x).$$

Les expressions (2) sont alors à remplacer, toujours pour l'intervalle de rang $-n$, par

$$f(x)\frac{A_n(-x)}{A_0(-x)}, \qquad -f(x)\frac{B_n(-x)}{A_0(-x)}.$$

Or, ces nouveaux coefficients de $f(x)$ ne sont pas moins quelconques que ceux qui figurent dans les expressions (2). Donc *une série trigonométrique généralisée du type* (F) *qui représente $f(x)$ ou* o *dans l'intervalle de rang* o (suivant qu'on y prend les cosinus ou les sinus) *représente, dans tous les autres intervalles, $f(x)$ multipliée par des fonctions de x qui peuvent être données à l'avance.*

Une seule restriction peut provenir des conditions de convergence du second membre de (1). Ainsi, $A_n(x)$ et $B_n(x)$ doivent tendre uniformément vers zéro, quand n croît indéfiniment. On pourrait se demander, il est vrai, si la convergence de la série (1) est bien nécessaire pour ce qui précède et si l'on ne pourrait pas considérer cette série comme un pur symbole, mais cette question ne paraît pas présenter grand intérêt; il suffira de remarquer que les A_n et les B_n peu-

vent être quelconques dans un nombre *fini* d'intervalles, nombre d'ailleurs aussi grand qu'on le voudra.

Observons encore que les résultats que nous venons d'obtenir ne sont pas spécialement particularisés par les hypothèses $\psi_1 = 2\pi$, $\psi_0 = 0$. Soit, par exemple, $0 < \psi_0 < \psi_1 < 2\pi$. On peut alors imaginer que $F(x, \psi)$ est nulle dans l'intervalle $0, \psi_0$ et dans l'intervalle $\psi_1, 2\pi$, ce qui nous ramène au cas précédent. Si ψ_0 et ψ_1 se rapprochent de manière à ne plus différer que de $d\psi$, l'intégration par rapport à ψ disparaît et les formules (F) redonnent les formules (B).

9. *Cas où* $F(x, \psi)$ *ne dépend pas de* x. — Si nous remplaçons $F(x, \psi)$ par une fonction $F(\psi)$ de la seule variable ψ, les formules (F) deviennent simplement

$$(G) \quad f(x)\frac{\int_{\psi_0}^{\psi_1} F(\psi) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\psi\, d\psi}{\int_{\psi_0}^{\psi_1} F(\psi)\, d\psi} = \frac{\frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_\alpha^\beta \int_{\psi_0}^{\psi_1} f(\xi) F(\psi) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} k_\nu(x-\xi)\, d\psi\, d\xi}{\int_{\psi_0}^{\psi_1} F(\psi)\, d\psi}.$$

Là encore, on pourra supposer, en général, que

$$(3) \quad \begin{cases} F(\psi) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\psi + a_2 \cos 2\psi + \dots \\ \qquad\qquad + b_1 \sin\psi + b_2 \sin 2\psi + \dots \end{cases}$$

et l'on démontrera comme précédemment que, dans l'intervalle de rang positif n, le premier membre de (G) peut s'écrire

$$(4) \qquad f(x)\frac{a_n}{a_0} \quad \text{ou} \quad f(x)\frac{b_n}{a_0},$$

suivant que dans (G) on a pris les cosinus ou les sinus. Dans l'intervalle de rang $-n$, la représentation est la même que dans l'intervalle symétrique de rang n (au signe près si l'on a pris les sinus). Ici se place un léger paradoxe. De l'examen des expressions (4), il semble que l'on puisse conclure qu'en faisant

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots \qquad \text{et} \qquad 0 = b_1 = b_2 = \dots$$

les formules (G) doivent naturellement se réduire à une série de Fourier, puisque alors la fonction représentée dans l'intervalle de rang zéro se répéterait identiquement dans tous les autres intervalles. Au fond, cette conclusion n'a pas de sens précis parce qu'alors la série (3) est divergente. D'autre part, en observant que

$$\pi a_m = \int_0^{2\pi} F(\psi)\cos m\psi\, d\psi, \qquad \pi b_m = \int_0^{2\pi} F(\psi)\sin m\psi\, d\psi$$

[$F(\psi)$ étant nulle s'il le faut pour ψ entre o et ψ_0 et entre ψ_1 et 2π], on voit que tous les a_m ne peuvent être égaux, ni tous les b_m nuls, à moins que $F(\psi)$ ne soit identiquement nulle. Or, on peut obtenir cela, en rapprochant ψ_1 et ψ_0 dans le voisinage de zéro, ce qui est une remarque analogue à celle du paragraphe précédent. Alors, la formule (G) se réduit bien à la formule de Fourier [1].

10. *Étude des formules* (B) *dans un intervalle de rang quelconque.* — Les formules (B) déduites de (F) ou de (G), comme il a été expliqué, se présentent sous la forme

$$\text{(B')} \qquad f(x)\,{\cos \atop \sin}\, n\psi = \frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_\alpha^\beta f(\xi)\,{\cos \atop \sin}\, k_\nu(x-\xi)\,d\xi,$$

$$k_\nu = \frac{2\nu\pi+\psi}{\beta-\alpha}.$$

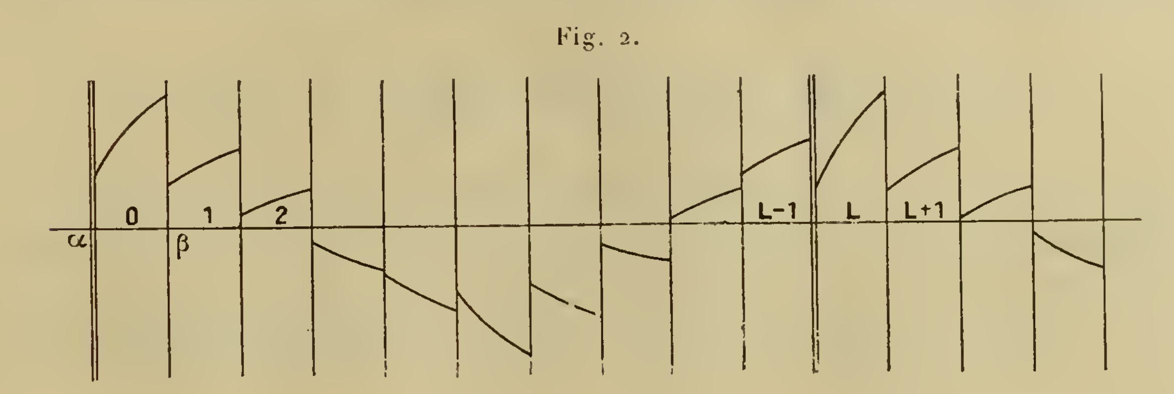
On voit très aisément ici que la courbe représentée dans l'intervalle de rang zéro est représentée, dans les intervalles suivants, avec toutes ses ordonnées multipliées par des facteurs de la forme ${\cos \atop \sin}\, n\psi$, ce qui donne finalement une ligne discontinue à allure sinusoïdale. La figure est faite en supposant que l'on prenne les cosinus dans (B'). Les sinus auraient donné quelque chose d'analogue avec cette seule différence

---

[1] Les résultats de ce paragraphe ont été communiqués aux *Comptes rendus* (16 juillet 1906). Ils forment dans cette Note une seconde moitié indépendante de la première, celle-ci ayant trait à certaines remarques sur les équations aux dérivées partielles, remarques qui seront l'objet d'une réexposition spéciale.

que dans o nous aurions simplement représenté le segment α, β. En général, l'arc relatif à l'intervalle o ne sera jamais reproduit *identiquement* dans aucun autre, mais ceci se produira toutes les fois que ψ sera commensurable avec 2π. Soit, en effet, $L\psi = 2M\pi$, L et M étant

Fig. 2.



des entiers. Lorsque le rang n atteindra la valeur L, $\overset{\cos}{\underset{\sin}{\cdot}} n\psi$ prendront l'une des valeurs 1, 0.

Dans ce cas de commensurabilité de ψ *et de* 2π, on peut remarquer qu'il est loisible de déduire (B') de la formule de Fourier appliquée d'abord à la totalité des intervalles 0, 1, 2, ..., $L-1$, car la représentation y est identiquement la même que dans les intervalles L, ..., $2L-1$, ... formés de la même manière. Mais, si l'on établit ainsi la formule (B'), il faut démontrer après coup qu'elle est encore valable même lorsque ψ et 2π ne sont plus commensurables, et, inconvénient encore beaucoup plus grave, on fait jouer à ψ un rôle très artificiel en dissimulant la véritable origine de ce paramètre, qui tient, comme on l'a vu au n° 1, à la nature même des fonctions employées dans les développements ici étudiés, sans considération préliminaire d'un développement déjà formé.

Les formules (B') ont encore une autre importance qui provient de ce que, en les élevant au carré et les ajoutant, on a, pour représenter $[f(x)]^2$, un développement curieux au point de vue formel. Mais, comme dans ces conditions $[f(x)]^2$ est identiquement représenté dans un intervalle de rang quelconque, on peut se demander (question déjà rencontrée) si cela n'implique pas que le nouveau développement ne soit au fond qu'une série de Fourier déguisée. Nous allons voir qu'ici il en est effectivement ainsi, mais que ceci implique cependant de nouveaux résultats dignes d'attention.

11. *Relations entre les coefficients du développement de $f(x)$ en série* (B) *et ceux du développement de $[f(x)]^2$ en série de Fourier.* — Séparons les deux formules contenues dans (B′).

Les sigmas des seconds membres peuvent s'écrire respectivement

$$\sum \quad A_\nu \cos k_\nu x + B_\nu \sin k_\nu x,$$

$$\sum - B_\nu \cos k_\nu x + A_\nu \sin k_\nu x,$$

en posant

$$A_\nu = \int_\alpha^\beta f(\xi) \cos k_\nu \xi \, d\xi, \qquad B_\nu = \int_\alpha^\beta f(\xi) \sin k_\nu \xi \, d\xi.$$

Élevant au carré les sigmas précédents et ajoutant on obtient, après des réductions faciles,

$$\sum\sum (A_\nu A_{\lambda+\nu} + B_\nu B_{\lambda+\nu}) \cos(k_{\lambda+\nu} - k_\nu)x$$
$$+ (A_\nu B_{\lambda+\nu} - A_{\lambda+\nu} B_\nu) \sin(k_{\lambda+\nu} - k_\nu)x.$$

Or

$$k_\nu = \frac{2\nu\pi + \psi}{\beta - \alpha}, \qquad k_{\lambda+\nu} - k_\nu = \frac{2\lambda\pi}{\beta - \alpha}.$$

Donc

$$[f(x)]^2 = \frac{1}{(\beta-\alpha)^2} \sum\sum (A_\nu A_{\lambda+\nu} + B_\nu B_{\lambda+\nu}) \cos \frac{2\lambda\pi x}{\beta - \alpha}$$
$$+ (A_\nu B_{\lambda+\nu} - A_{\lambda+\nu} B_\nu) \sin \frac{2\lambda\pi x}{\beta - \alpha}.$$

Calculons maintenant

$$(5) \qquad \frac{1}{\beta - \alpha} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} (A_\nu A_{\lambda+\nu} + B_\nu B_{\lambda+\nu}), \qquad \frac{1}{\beta - \alpha} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} (A_\nu B_{\lambda+\nu} - A_{\lambda+\nu} B_\nu).$$

Dans chaque produit d'intégrales tel que $A_\nu A_{\lambda+\nu}$ nous pouvons, dans le second facteur, par exemple, remplacer la variable d'intégration ξ par une variable auxiliaire ζ, ce qui permet de remplacer ledit produit par une intégrale double.

La première des expressions (5) devient ainsi

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\sum\int_\alpha^\beta\int_\alpha^\beta f(\xi)f(\zeta)\cos\frac{(2\nu\pi+\psi)(\xi-\zeta)-2\lambda\pi\zeta}{\beta-\alpha}\,d\xi\,d\zeta$$

ou

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\sum\int_\alpha^\beta\int_\alpha^\beta f(\xi)f(\zeta)\cos k_\nu(\xi-\zeta)\cos\frac{2\lambda\pi\zeta}{\beta-\alpha}\,d\xi\,d\zeta.$$

L'expression analogue contenant des sinus est nulle, d'après la seconde des formules (B); d'après la première, on trouve immédiatement, pour l'expression précédente et pour celle qui correspond à la seconde formule (5),

$$(6)\qquad \int_\alpha^\beta [f(\zeta)]^2\cos\frac{2\lambda\pi\zeta}{\beta-\alpha}\,d\zeta,\qquad \int_\alpha^\beta [f(\zeta)]^2\sin\frac{2\lambda\pi\zeta}{\beta-\alpha}\,d\zeta.$$

Si, dans le développement de $[f(x)]^2$, on met ces expressions à la place des expressions (5), on retrouve bien une série de Fourier.

Les égalités

$$(\mathrm{H})\qquad \frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\begin{pmatrix}A_\nu A_{\lambda+\nu}+B_\nu B_{\lambda+\nu}\\ A_\nu B_{\lambda+\nu}-B_\nu A_{\lambda+\nu}\end{pmatrix}=\int_\alpha^\beta [f(\zeta)]^2\,{\cos\atop\sin}\,\frac{2\lambda\pi\zeta}{\beta-\alpha}\,d\zeta$$

sont des généralisations d'égalités analogues données par M. H. Lebesgue pour les séries de Fourier (*Leçons sur les séries trigonométriques*, 1906, p. 100). On voit qu'une série (B) contient non seulement un paramètre ψ dont elle est au fond indépendante, mais que l'on peut former avec ses coefficients des séries de formes quadratiques qui sont dans le même cas. Pour $\lambda=0$, la formule (H) nous permet d'exprimer la somme des carrés des coefficients d'une série (B). On trouve, en effet,

$$(\mathrm{H}')\qquad \frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}(A_\nu^2+B_\nu^2)=\int_\alpha^\beta [f(\zeta)]^2\,d\zeta.$$

12. *Exemples explicites de séries trigonométriques généralisées.* — Il n'est pas beaucoup plus difficile, en général, de former des

séries (B) que des séries de Fourier. L'intégration en ψ peut être ensuite plus pénible, mais les séries (E) n'en sont pas moins remarquables parmi des séries qui dépendent d'opérations transcendantes pratiquement et même symboliquement inexécutables. De plus, une série (B) étant formée, elle peut donner, par l'intermédiaire des formules (H) et (H'), des résultats très remarquables, tels que des séries arithmétiques, des séries de fractions rationnelles, etc. Reprenons les formules (B) écrites un peu plus explicitement comme suit :

$$\left.\begin{matrix} f(x) \\ 0 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\beta - \alpha} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} k_\nu x \pm B_\nu \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} k_\nu x, \qquad k_\nu = \frac{2\nu\pi + \psi}{\beta - \alpha},$$

A_ν et B_ν ayant les significations indiquées au paragraphe précédent.

Proposons-nous de développer d'abord une simple constante, soit 1, en série (B) et cela dans l'intervalle $\alpha = -\pi$ à $\beta = +\pi$ qui sera ici l'intervalle de rang zéro. Une série de Fourier ne donnerait pas à proprement parler un développement, non pas que la formation en soit impossible, mais parce qu'elle n'est que trop simple; tous les coefficients du développement, sauf le premier, seraient nuls et l'on aurait seulement $1 = 1$. Il en est autrement avec une série (B).

Tout d'abord, on a $k_\nu = \nu + \frac{\psi}{2\pi} = \nu + \psi'$ et, pour plus de simplicité, nous supprimerons l'accent de ψ'. On aura ensuite

$$A_\nu = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(\nu + \psi)\xi \, d\xi = 2\frac{\sin(\nu + \psi)\pi}{\nu + \psi},$$

$$B_\nu = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(\nu + \psi)\xi \, d\xi = 0.$$

Donc

$$(7) \qquad 1 = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{\sin(\nu + \psi)\pi}{\nu + \psi} \cos(\nu + \psi)x.$$

Pour $\psi = 0$, on retrouve l'identité $1 = 1$. Le principal intérêt d'une telle série provient des relations que les formules (H) et (H') vont

donner entre ses coefficients. Ainsi (H′) donne

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} 4\frac{\sin^2(\nu+\psi)\pi}{(\nu+\psi)^2} = \int_{-\pi}^{+\pi} d\zeta,$$

d'où

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi\psi} = \sum_\nu \frac{1}{(\nu+\psi)^2}.$$

Cette formule subsiste évidemment si l'on y considère ψ comme une variable complexe. Le second membre est une série de fractions rationnelles uniformément convergente que l'on peut dériver ou intégrer par rapport à ψ. De plus, comme ψ est arbitraire on peut, dans les formules obtenues, remplacer ψ par $\frac{1}{2} - \psi$. On a ainsi des formules en nombre infini, dont voici quelques-unes qui seront utiles un peu plus loin :

$$\pi \cot \pi\psi = \sum_\nu \frac{1}{\nu+\psi}, \qquad \pi \operatorname{tang} \pi\psi = \sum_\nu \frac{1}{\nu+\frac{1}{2}-\psi},$$

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi\psi} = \sum_\nu \frac{1}{(\nu+\psi)^2}, \qquad \frac{\pi^2}{\cos^2\pi\psi} = \sum_\nu \frac{1}{\left(\nu+\frac{1}{2}-\psi\right)^2},$$

$$\frac{\pi^3 \cos\pi\psi}{\sin^3\pi\psi} = \sum_\nu \frac{1}{(\nu+\psi)^3}, \qquad \frac{\pi^3 \sin\pi\psi}{\cos^3\pi\psi} = \sum_\nu \frac{1}{\left(\nu+\frac{1}{2}-\psi\right)^3},$$

$$\frac{\pi^4}{3}\,\frac{1+2\cos^2\pi\psi}{\sin^4\pi\psi} = \sum_\nu \frac{1}{(\nu+\psi)^4}, \qquad \frac{\pi^4}{3}\,\frac{1+2\sin^2\pi\psi}{\cos^4\pi\psi} = \sum_\nu \frac{1}{\left(\nu+\frac{1}{2}-\psi\right)^4},$$

. . . . , ... ,

Ces formules, bien entendu, sont faciles à obtenir par l'habituelle méthode de Cauchy. L'intérêt ici consiste à les obtenir comme résultant des propriétés des coefficients d'une série (B).

15. Développons maintenant $\frac{x}{2}$ de $-\pi$ à $+\pi$. On a sans peine

$$A_\nu = 0, \qquad B_\nu = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\xi}{2}\sin(\nu+\psi)\xi\, d\xi = \frac{\sin(\nu+\psi)\pi}{(\nu+\psi)^2} - \frac{\pi\cos(\nu+\psi)\pi}{\nu+\psi}.$$

Donc

$$(8) \qquad \frac{x}{2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \left[\frac{\sin(\nu+\psi)\pi}{\nu+\psi} - \pi\cos(\nu+\psi)\pi \right] \frac{\sin(\nu+\psi)x}{\nu+\psi}.$$

Pour $\psi = 0$, on retrouve la formule bien connue

$$(9) \qquad \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots.$$

Si nous reprenons la série précédente, la formule (H′) nous donnera

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{1}{(\nu+\psi)^2} \left[\frac{\sin(\nu+\psi)\pi}{(\nu+\psi)\pi} - \pi\cos(\nu+\psi)\pi \right]^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\zeta^2}{4}\, d\zeta,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\pi^4}{3} = \sin^2\pi\psi \sum \frac{1}{(\nu+\psi)^4} - 2\pi\sin\pi\psi\cos\pi\psi \sum \frac{1}{(\nu+\psi)^3} + \pi^2\cos^2\pi\psi \sum \frac{1}{(\nu+\psi)^2}.$$

C'est là une formule récurrente qui pourrait servir à calculer une des sommes considérées au paragraphe précédent, lorsqu'on en connaît deux autres. On la vérifie immédiatement, les trois sigmas qu'elle contient étant connus d'après les formules terminant le n° **12**.

14. Cherchons encore à développer $\frac{x^2}{4}$ toujours dans le même intervalle. Cette fois B_ν est nul et l'on a, tout calcul fait,

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{x^2}{4} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} & \left[\frac{\pi^2}{2}\sin(\nu+\psi)\pi \right. \\ & \left. + \pi\frac{\cos(\nu+\psi)\pi}{\nu+\psi} - \frac{\sin(\nu+\psi)\pi}{(\nu+\psi)^2} \right] \frac{\cos(\nu+\psi)x}{\nu+\psi}. \end{aligned} \right.$$

Pour $\psi = 0$, on a

$$\frac{x^2}{4} = \frac{1}{2\pi} \sum \left(\frac{\pi^2}{2}\frac{\sin\nu\pi}{\nu} + \pi\frac{\cos\nu\pi}{\nu^2} - \frac{\sin\nu\pi}{\nu^3} \right) \cos\nu x.$$

Le terme qui correspond à $\nu = 0$ se présente alors sous une forme indéterminée, mais on trouve sans peine que sa vraie valeur est $\frac{\pi^2}{12}$ et le développement précédent devient

$$\frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots, \tag{11}$$

ce qui est encore un résultat bien connu. La formule (H') nous donnerait ici

$$\frac{\pi^6}{5} = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \left[\frac{\pi^2 \sin \pi\psi}{\nu + \psi} + \frac{2\pi \cos \pi\psi}{(\nu + \psi)^2} - \frac{2 \sin \pi\psi}{(\nu + \psi)^3} \right]^2,$$

ce qui prend encore facilement la forme d'une formule récurrente relative aux sommes déjà considérées.

15. *Sur l'intégration et la dérivation des séries* (B). — Peut-on admettre que les séries (B) sont intégrables ou dérivables en même temps que les séries de Fourier que l'on en tire pour $\psi = 0$. Il est facile de voir que la réponse est affirmative si toutefois on remarque qu'une certaine série (B) et sa fonction primitive peuvent ne se correspondre qu'à la condition de donner à la constante d'intégration la forme d'une série (B). Ainsi (11) ayant pour dérivée (9), (10) doit avoir (8) pour dérivée. Mais cela n'est immédiatement vérifiable qu'en remarquant que, dans le second membre de (10), on peut poser, d'après la formule (7),

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{\pi^2}{2} \frac{\sin(\nu + \psi)\pi}{\nu + \psi} \cos(\nu + \psi)x = \frac{\pi^3}{2}.$$

Cette précaution prise, la dérivation est immédiate et redonne bien la série (8). Par contre (8) ne saurait donner (7) par dérivation, mais cela n'a rien d'extraordinaire, puisque (9) n'est pas dérivable.

16. *Développements de* $\sin mx$ *et de* $\cos mx$. — Prenons encore, comme exemples simples et remarquables, les développements en série (B) de $\sin mx$ et de $\cos mx$, m étant un nombre quelconque. On

trouve facilement

$$\sin mx = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} (-1)^\nu \left[\frac{\sin(m-\psi)\pi}{m-\nu-\psi} - \frac{\sin(m+\psi)\pi}{m+\nu+\psi} \right] \sin(\nu+\psi)x,$$

$$\cos mx = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} (-1)^\nu \left[\frac{\sin(m-\psi)\pi}{m-\nu-\psi} + \frac{\sin(m+\psi)\pi}{m+\nu+\psi} \right] \cos(\nu+\psi)x.$$

La formule (H′) nous donne maintenant

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \left[\frac{\sin(m-\psi)\pi}{m-\nu-\psi} \pm \frac{\sin(m+\psi)\pi}{m+\nu+\psi} \right]^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} \left({\cos \atop \sin} m\zeta \right)^2 d\zeta = \pi.$$

On peut déduire de là

$$2\pi^2 = \sin^2(m-\psi)\pi \sum \frac{1}{(m-\psi-\nu)^2} + \sin^2(m+\psi)\pi \sum \frac{1}{(m+\psi+\nu)^2},$$

ce qu'il est facile de vérifier.

On voit suffisamment par ces exemples comment l'existence d'un développement en série (B) entraîne l'existence de plusieurs autres séries intéressantes et élégantes.

17. *Remarques sur l'intégration relative à ψ.* — Les quelques exemples qui précèdent montrent que des séries (B) fort simples ne se laissent pas facilement intégrer par rapport à ψ, s'il s'agit, bien entendu, d'une intégration explicite. Mais cette difficulté peut être déplacée de façon remarquable. Considérons à nouveau le numérateur du second membre de (E) ou de (F). On peut l'écrire, en modifiant un peu la forme de ψ,

$$\frac{1}{\beta-\alpha} \sum \int_\alpha^\beta \int_{\psi_0}^{\psi_1} f(\xi)\,\mathrm{F}(x,\psi) {\cos \atop \sin} \left[\frac{2\pi}{\beta-\alpha} (\nu-\psi)(x-\xi) \right] d\psi\, d\xi.$$

On voit alors que, *si l'on convient de commencer par l'intégration relative à ψ*, celle-ci sera exactement de même nature que si l'on se proposait de développer $\mathrm{F}(x,\psi)$ en série trigonométrique. La plus grande complication sera alors reportée sur l'intégration en ξ. Comme

exemple extrêmement simple, prenons la série (B),

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi) \cos[(\nu - \psi)(x - \xi)]\, d\xi,$$

faisons $\mathrm{F}(x, \psi) = 1$, c'est-à-dire multiplions simplement par $d\psi$ et intégrons entre $-\pi$ et $+\pi$; on aura

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi) \frac{\sin \pi(x - \xi)}{\pi(x - \xi)} \cos \nu (x - \xi)\, d\xi.$$

Cette formule, qui représente $f(x)$ dans l'intervalle de rang zéro $(-\pi, +\pi)$, représente identiquement zéro dans tous les autres, ce qui ressort clairement du procédé de formation. La méthode employée permettrait évidemment de former beaucoup d'autres séries analogues. Enfin, pour $\mathrm{F}(x, \psi) = 1$, $\psi_0 = 0$, $\psi_1 = 2\pi$, on tire de (F)

$$2\pi \left.\begin{matrix} f(x) \\ 0 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\beta - \alpha} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{0}^{2\pi} f(\xi) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \left[\frac{2\nu\pi + \psi}{\beta - \alpha} (x - \xi) \right] d\psi\, d\xi$$

ou, comme il est facile de le voir,

$$\left.\begin{matrix} f(x) \\ 0 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \varkappa (x - \xi)\, d\varkappa\, d\xi.$$

Le second membre ainsi obtenu doit représenter $f(x)$ (ou zéro) dans α, β et toujours zéro hors de α, β. Or, c'est là la formule bien connue de Fourier où ne figurent que des intégrales et non des sigmas.

CHAPITRE III.

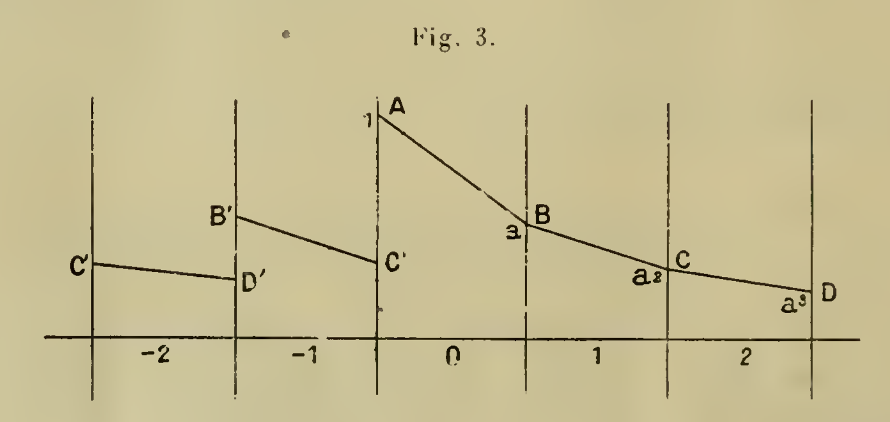
APPLICATIONS ET PROPRIÉTÉS DIVERSES DES SÉRIES GÉNÉRALISÉES.

18. *Représentation des fonctions ponctuellement discontinues.* — Considérons une série (B) ou plus généralement une série (E),

dans laquelle $F(x, \psi)$ est fonction continue de x et de ψ. Si dans l'une des séries en question on ne prend qu'un nombre *fini* de termes, on ne construira jamais ainsi autre chose qu'une fonction continue, tout comme dans le cas d'une série trigonométrique ordinaire. Cependant, si l'on prend une infinité de termes, on représente, *en général,* une fonction discontinue, car il n'y a aucune raison pour qu'il y ait partout raccordement entre les différents segments de courbe qui se trouvent dans des intervalles de rangs consécutifs. Avec la terminologie adoptée par M. R. Baire (*Leçons sur les fonctions discontinues,* 1905), on peut donc dire que les fonctions discontinues représentées par les séries trigonométriques généralisées sont des fonctions *limites* de fonctions continues. Nous allons voir comment la considération des séries généralisées permet de mettre en lumière certains faits concernant les fonctions discontinues de façon particulièrement simple.

Commençons d'abord par le cas exceptionnel où la formule (G) permettra la représentation d'une fonction continue dans le champ réel

Fig. 3.



indéfiniment étendu dans le sens positif, c'est-à-dire formé par les intervalles de rangs 0, 1, 2, ... Soit, pour simplifier, un segment de droite considéré dans l'intervalle de rang zéro et dont les extrémités ont pour ordonnées 1 et a ($a < 1$).

Si nous prenons la série (G), susceptible de représenter ce segment dans l'intervalle zéro, cette même série représentera dans les intervalles suivants un segment analogue formé en multipliant les ordonnées du premier par des constantes $\frac{a_1}{a_0}$, $\frac{a_2}{a_0}$, $\dots$, et les conditions de rac-

cordement entre tous ces segments seront

$$\frac{a_1}{a_0} = a, \qquad \frac{a_2}{a_0} = a^2, \qquad \dots.$$

Par suite (n° **9**),

$$F(\psi) = a_0\left(\frac{1}{2} + a\cos\psi + a^2\cos 2\psi + \dots\right) = a_0\left(\frac{1 - a\cos\psi}{1 - 2a\cos\psi + a^2} - \frac{1}{2}\right).$$

Dans les intervalles de rang négatif, on obtient alors des segments B′C′, C′D′, ... respectivement placés dans -1, -2, ... comme BC, CD, ... dans 1, 2, ... et il est clair qu'alors le raccordement est impossible. Si à AB on avait substitué un segment curviligne ayant mêmes extrémités, les conclusions auraient été identiques et, en résumé, on peut énoncer le théorème suivant :

Une série (G) *représente, en général, une ligne ayant pour discontinuités les extrémités d'un intervalle de rang quelconque. Il peut y avoir exceptionnellement continuité quand on passe de tout intervalle de rang nul ou positif au suivant et l'on obtient alors une ligne à points anguleux situés sur la courbe exponentielle*

$$y = a^n, \qquad x = n(\beta - \alpha).$$

Observons toujours que ceci suppose $a < 1$. Pour $a > 1$ on obtiendrait les raccordements dans l'ensemble des intervalles de rang négatif.

19. Si, d'une série (G), nous revenons à une série (E), nous reconnaîtrons immédiatement qu'une question analogue à celle que nous venons de résoudre ne se pose plus. A coup sûr, si l'on part d'une fonction continue dans tout l'intervalle de rang zéro et que l'on construise une série (E) quelconque ([1]) pour l'y représenter, il arrivera, *en général,* que la fonction ainsi construite entre $-\infty$ et $+\infty$ sera continue dans l'intervalle de rang zéro et dans tous les autres, mais discontinue quand on passera d'un intervalle à un autre. Mais cela n'empêche pas que ces dernières discontinuités n'existent qu'en géné-

---

([1]) C'est-à-dire telle que $F(x, \psi)$ n'y soit pas particulièrement déterminée.

ral et non de façon inévitable. Nous avons vu, en effet, en écrivant la formule (E) sous la forme (F) qu'elle représentait $f(x)$ dans o et cette fonction multipliée par des fonctions arbitraires [1] dans tous les autres intervalles. Cela permettra évidemment de supprimer autant de discontinuités qu'on le voudra.

Revenons au cas général. Soit $\varphi(x)$ le second membre de (E). C'est là une fonction de x dont nous connaissons parfaitement l'allure entre $-\infty$ et $+\infty$. Soit k un nombre entier et considérons $\varphi(kx+\alpha)$, α et β étant toujours les limites de l'intervalle de rang zéro. Les discontinuités de cette nouvelle fonction seront définies par

$$(1) \qquad kx+\alpha = \alpha + m(\beta-\alpha) \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{m}{k}(\beta-\alpha).$$

Donc $\varphi(kx+\alpha)$ est une fonction ayant, comme $\varphi(x)$, des discontinuités équidistantes, mais elles sont d'autant plus rapprochées que k est plus grand.

20. *Fonctions discontinues dans tout intervalle.* — En partant de ce qui précède, on peut construire, avec une extrême facilité, des fonctions discontinues dans tout intervalle d'un type analogue à celui de certaines fonctions déjà construites par M. G. Darboux, dans son *Mémoire sur les fonctions discontinues* (*Annales de l'École Normale,* 1875). Ces fonctions sont développables en séries, dont les termes ne sont que ponctuellement discontinus. D'après la terminologie de M. Baire, elles sont de classe 2. Soit la série

$$(2) \qquad \Phi(x) = a_1\varphi(x+\alpha) + a_2\varphi(2x+\alpha) + a_3\varphi(3x+\alpha) + \ldots,$$

qui, avec les hypothèses faites pour la construction de φ, est uniformément convergente si $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ est absolument convergente. Pour $x = \frac{m}{k}(\beta-\alpha)$, le terme d'indice k et tous ceux d'indice multiple de k sont discontinus.

Donc $\Phi(x)$ est une fonction discontinue pour toutes les valeurs de x

---

[1] Fonctions assujetties cependant à rendre convergente la série (1) du n° 8.

commensurables avec $\beta - \alpha$, mais continue pour toutes les autres valeurs de x.

On peut former des exemples plus intéressants encore. Soit $y = \psi(x)$ une courbe continue, dont l'ordonnée y varie de $-\infty$ à $+\infty$, lorsque x parcourt un intervalle d'extrémités à distance finie. Une telle courbe sera coupée au moins en un point par une parallèle à l'axe des x, ce qui revient à dire qu'une équation telle que

$$(3) \qquad \psi(x) = \alpha + m(\beta - \alpha)$$

aura au moins une racine, lorsque le second membre y sera considéré comme une simple constante. Par suite, cette équation aura une infinité de racines correspondant chacune à une valeur de l'entier m. Soit maintenant la série

$$(4) \qquad \Phi(x) = a_1\varphi[\psi_1(x)] + a_2\varphi[\psi_2(x)] + \ldots,$$

où ψ_1, ψ_2, ... sont des fonctions du type ψ. On conçoit que $\Phi(x)$ puisse être dans ces conditions une fonction admettant pour discontinuités les racines de toute une classe d'équations (algébriques ou transcendantes), en entendant par classe d'équations l'ensemble des équations de même forme, mais de coefficients différents.

Nous n'insisterons pas davantage sur de telles considérations qui seraient mieux à leur place dans une étude sur les fonctions de variables réelles et rentrent d'ailleurs dans le problème de la construction de fonctions discontinues pour tous les points d'un ensemble dénombrable.

21. *Application du procédé de sommation de M. Fejér aux séries trigonométriques généralisées.* — Dans un court mais très intéressant Mémoire intitulé *Untersuchungen über Fouriersche Reihen* (*Mathematische Annalen,* t. LVIII, 1904), M. Fejér applique aux séries de Fourier un procédé de sommation étudié dans le cas des séries entières par MM. Borel, Mittag-Leffler, etc. Il montre que, si s_n est la somme des n premiers termes d'une série de Fourier, la limite de l'expression

$$\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n},$$

pour n croissant indéfiniment, est, en général, la même que celle de s_n. Bien plus l'expression précédente peut avoir une limite, s_n n'en ayant pas, d'où la notion de série trigonométrique divergente et sommable ([1]). Je vais montrer ici que la méthode de M. Fejér s'applique aux séries (B) ou (F). Commençons par étudier les séries (B).

Posons

$$(5)\quad s_\varpi = \frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{\nu=-\varpi}^{\nu=+\varpi}\int_\alpha^\beta f(\xi)\,{\cos \atop \sin}\, k_\nu(x-\xi)\,d\xi, \qquad k_\nu = \frac{2\nu\pi \pm \left(\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)}{\beta-\alpha},$$

en reprenant les mêmes notations qu'au n° **5**, car il sera intéressant de comparer les résultats obtenus dans ce numéro avec ceux que nous allons obtenir maintenant. D'après une identité déjà employée, on a

$$s_\varpi = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(\xi)\,\frac{\sin\left[(2\varpi+1)\pi\dfrac{x-\xi}{\beta-\alpha}\right]}{\sin\pi\dfrac{x-\xi}{\beta-\alpha}}\,{\cos \atop \sin}\left[\left(\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)\frac{x-\xi}{\beta-\alpha}\right]d\xi.$$

De plus

$$\sum_{\varpi=0}^{\varpi=n-1}\sin\left[(2\varpi+1)\pi\frac{x-\xi}{\beta-\alpha}\right] = \frac{\sin^2 n\pi\dfrac{x-\xi}{\beta-\alpha}}{\sin\pi\dfrac{x-\xi}{\beta-\alpha}};$$

donc

$$\frac{s_0+s_1+\ldots+s_{n-1}}{n} = \frac{1}{n(\beta-\alpha)}\int_\alpha^\beta f(\xi)\,\frac{\sin^2 n\pi\dfrac{x-\xi}{\beta-\alpha}}{\sin^2\pi\dfrac{x-\xi}{\beta-\alpha}}\,{\cos \atop \sin}\left[\left(\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)\frac{x-\xi}{\beta-\alpha}\right]d\xi.$$

Toujours comme au n° **5**, posons

$$\pi\frac{x-\xi}{\beta-\alpha} = -\gamma, \qquad \xi = x+\gamma\frac{\beta-\alpha}{\pi}, \qquad d\xi = \frac{\beta-\alpha}{\pi}\,d\gamma;$$

il viendra

$$\frac{s_0+s_1+\ldots+s_{n-1}}{n} = \frac{1}{\pi n}\int_{\pi\frac{\alpha-x}{\beta-\alpha}}^{\pi\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}}\frac{\sin^2 n\gamma}{\sin^2\gamma}\,{\cos \atop \sin}\left[\frac{\gamma}{\pi}\left(2\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\right]f\left(x+\gamma\frac{\beta-\alpha}{\pi}\right)d\gamma.$$

([1]) *Voir* la note placée à la fin du Mémoire.

Il nous reste à chercher la limite de cette expression pour n croissant indéfiniment. C'est là une étude absolument analogue à celle de l'intégrale de Dirichlet qui se rencontre quand on fait la sommation des termes d'une série de Fourier.

M. Fejér, qui a étudié cette intégrale dans le cas un peu plus simple où le facteur $\frac{\cos}{\sin}\frac{\gamma}{\pi}\left(2\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$ n'y figure pas, fait à son sujet des remarques aussi importantes que judicieuses. Contrairement à ce que l'on pourrait croire au premier abord, elle est plus simple que celle de Dirichlet. Dans cette dernière, en effet, figure un quotient de sinus qui change de signe de plus en plus fréquemment lorsque n croît, tandis qu'ici un pareil quotient figure par son carré, lequel garde un signe invariable. Ceci entraîne que l'intégrale ici considérée peut être évaluée au moyen du premier théorème de la moyenne, tandis que l'intégrale de Dirichlet nécessite l'emploi moins simple du second.

Comme au n° **5** nous remarquerons que zéro est compris entre les deux limites $\pi\frac{\alpha-x}{\beta-\alpha}$ et $\pi\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}$, et, par suite, l'intégrale précédente pourra se scinder en les deux suivantes,

$$\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}}\frac{\sin^2 n\gamma}{\sin^2\gamma}\,\frac{\cos}{\sin}\left[\frac{\gamma}{\pi}\left(2\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\right]f\left(x+\gamma\frac{\beta-\alpha}{\pi}\right)d\gamma$$

$$+\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}}\frac{\sin^2 n\gamma}{\sin^2\gamma}\,\frac{\cos}{\sin}\left[\frac{\gamma}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)\right]f\left(x-\gamma\frac{\beta-\alpha}{\pi}\right)d\gamma,$$

γ ayant été changé en $-\gamma$ dans la seconde. Ce sont là des intégrales de la forme

$$J=\int_0^h\frac{\sin^2 n\gamma}{n\sin^2\gamma}\psi(\gamma)\,d\gamma,$$

et l'on sait que (*voir* L. Fejér, *loc. cit.*, p. 55)

$$\lim_{n=\infty} J=\frac{\pi}{2}\psi(0).$$

Donc

$$\lim_{n=\infty}\frac{s_0+s_1+\ldots+s_{n-1}}{n}=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)],$$

si l'on a pris les cosinus dans (5); le second membre est à remplacer par *zéro* si l'on a pris les sinus. On voit que le résultat est entièrement analogue à celui qu'on obtient en sommant directement, terme à terme, une série (B).

22. Pour simplifier l'écriture, supposons que $f(x)$ soit continue dans α, β, et posons

$$S_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n}, \qquad S_0 = 0,$$

d'où

$$f(x) = S_1 + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \ldots.$$

Observons de plus les identités

$$\frac{\sin^2 n\theta}{n\sin^2\theta} - \frac{\sin^2(n-1)\theta}{(n-1)\sin^2\theta} = \frac{n\cos 2(n-1)\theta - (n-1)\cos 2n\theta - 1}{2n(n-1)\sin^2\theta}$$
$$= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{k=n-1} k\cos 2k\theta.$$

Le dernier membre est la dérivée, par rapport à θ, de

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{k=n-1} \sin 2k\theta = \frac{\sin(n-1)\theta \sin n\theta}{n(n-1)\sin\theta} = \frac{\cos\theta - \cos(2n-1)\theta}{2n(n-1)\sin\theta}.$$

Dans ces conditions on forme facilement $S_n - S_{n-1}$ et l'on conclut

$$(\mathrm{I}) \quad \left.\begin{matrix} f(x) \\ 0 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_\alpha^\beta f(\xi) \frac{d}{dx} \left[\frac{\sin(n-1)\pi \dfrac{x-\xi}{\beta-\alpha} \sin n\pi \dfrac{x-\xi}{\beta-\alpha}}{n(n-1)\sin\pi \dfrac{x-\xi}{\beta-\alpha}} \right] \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} \left[\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right) \frac{x-\xi}{\beta-\alpha} \right] d\xi.$$

Ce sont là des séries d'un nouveau type entièrement comparables aux séries (B).

Dans un intervalle de rang quelconque elles représentent exactement ce que représente une série (B) dans le même intervalle. En particulier, pour $4\varphi = \pi$, la formule (I) donne une série entièrement comparable à la série de Fourier et, par suite, *le fait de représenter une fonction donnée dans l'intervalle de rang zéro et de la répéter*

identiquement dans tous les autres intervalles n'est pas une propriété caractéristique de la série de Fourier.

Remarquons que de la série (I) on pourrait essayer d'en déduire d'autres en réappliquant le procédé qui a été appliqué à (B). La somme des n premiers termes de (I) est S_n et l'on pourrait alors chercher la limite, pour n croissant indéfiniment, de

$$\frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n}.$$

Mais c'est là une étude que je me borne à signaler et qui, indéfiniment poursuivie, conduirait vraisemblablement à une infinité de séries jouissant des propriétés des séries (B) ou de la série de Fourier. On se reportera à ce sujet aux *Comptes rendus* du 13 janvier 1908.

23. On voit maintenant sans peine que le procédé de sommation précédent s'applique aussi bien aux séries généralisées du type (F). Il suffirait de raisonner comme au numéro précédent, en convenant de reporter toujours à la fin des calculs les intégrations par rapport à ψ. La conclusion serait la même qu'au n° **5**.

Ce sont là des résultats remarquables, non seulement quant aux séries ici étudiées, mais aussi quant à la méthode de sommation due à Cesàro, à MM. Mittag-Leffler, Borel, etc.

Observons aussi que, si une série (F) a été employée à la représentation d'une fonction ayant des expressions diverses et données à l'avance dans des intervalles de rangs différents, il y aura, en général, une infinité d'autres séries permettant une représentation identique.

24. *Remarques sur les solutions des équations linéaires aux dérivées partielles.* — Reprenons la formule (I) pour $4\varphi = \pi$, $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$. Elle s'écrit alors, en utilisant l'une des identités précédentes et en remplaçant x par θ,

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\,d\xi + \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi) \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{k\cos k(\theta-\xi)}{n(n-1)}\,d\xi.$$

Le second membre est évidemment une fonction périodique de θ

admettant la période 2π. Considérons maintenant l'expression

$$U_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\,d\xi + \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi) \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{k r^k \cos k(\theta-\xi)}{n(n-1)}\,d\xi.$$

C'est une solution de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} = 0.$$

Or, U_1 est de période 2π par rapport à θ et prend sur le cercle $r=1$ la valeur $f(\theta)$. Comme il ne peut y avoir qu'une solution de cette nature (principe de Dirichlet) il faut conclure que U_1 est identiquement équivalente à la solution de Poisson

$$U_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\,d\xi + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi) r^n \cos n(\theta-\xi)\,d\xi.$$

Remarquons que dans les solutions U_1 et U_2 ce sont toujours des termes de la forme $r^n \cos n(\theta-\xi)$ qui figurent dans les intégrales, mais ils sont rassemblés dans U_1 de manière à donner une série convergeant tout autrement que U_2.

On peut ajouter aussi que la méthode de sommation de M. Fejér n'est pas essentiellement distincte de la méthode analogue relative aux séries entières. Considérons les deux développements suivants, qui jouent un rôle capital en Physique mathématique et en Astronomie :

$$\log\sqrt{1+2r\cos\theta+r^2} = \frac{r\cos\theta}{1} - \frac{r^2\cos 2\theta}{2} + \frac{r^3\cos 3\theta}{3} - \ldots,$$

$$\text{arc tang}\,\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta} = \frac{r\sin\theta}{1} - \frac{r^2\sin 2\theta}{2} + \frac{r^3\sin 3\theta}{3} - \ldots.$$

D'après ce que nous venons de voir, les deux seconds membres peuvent être remplacés respectivement par

$$\frac{r\cos\theta}{1.2} + \frac{r\cos\theta - r^2\cos 2\theta}{2.3} + \frac{r\cos\theta - r^2\cos 2\theta + r^3\cos 3\theta}{3.4} + \ldots;$$

$$\frac{r\sin\theta}{1.2} + \frac{r\sin\theta - r^2\sin 2\theta}{2.3} + \frac{r\sin\theta - r^2\sin 2\theta + r^3\sin 3\theta}{3.4} + \ldots;$$

Or, les deux premiers développements s'obtiennent directement en partant de

$$\log(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots,$$

et en posant $z = re^{\theta i}$; en réunissant de même les deux derniers on trouve

$$\log(1+z) = \frac{z}{1.2} + \frac{z-z^2}{2.3} + \frac{z-z^2+z^3}{3.4} + \ldots,$$

formule facile à établir directement. On voit par cet exemple élémentaire que la possibilité de sommer de manières différentes une série trigonométrique découle d'une possibilité de même nature relative aux séries entières.

25. Reprenons maintenant les formules (G) du n° **9** et, pour simplifier l'écriture, considérons uniquement le numérateur du second membre où l'on prendra seulement le cosinus et $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$. Ce numérateur pourra alors s'écrire

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\int_0^{2\pi}\int_{\psi_0}^{\psi_1} f(\xi)\mathrm{F}(\psi)\cos[(\nu+\psi)(x-\xi)]\,d\psi\,d\xi$$
$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\int_0^{2\pi}\int_{\psi_0}^{\psi_1} f(\xi)\mathrm{F}(\psi)\cos[(\nu-\psi)(x-\xi)]\,d\psi\,d\xi.$$

Imaginons ensuite que l'on forme une nouvelle expression en partant de celle-ci dans laquelle on mettrait $r^{\nu+\psi}$ en facteur devant $\cos[(\nu+\psi)(x-\xi)]$ et $r^{\nu-\psi}$ en facteur devant $\cos[(\nu-\psi)(x-\xi)]$. L'expression ainsi formée serait bien encore une solution de l'équation de Laplace primitivement considérée; de plus, elle représenterait $f(x)$ [ou $f(\theta)$] sur le cercle $r = 1$, mais à la condition que x (ou θ) ne croisse pas au delà de 2π, sans quoi, d'après les propriétés reconnues à la formule (G), c'est le produit de $f(x)$ par une certaine constante qui serait représenté, constante qui changerait à nouveau lorsque la variable franchirait la valeur 4π et ainsi de suite.

Physiquement on pourrait se représenter une surface de Riemann formée de feuillets circulaires (de rayon 1) superposés dont les lignes de passage seraient des rayons. Sur le pourtour du feuillet supérieur,

la température serait $f(0)$ et, sur les pourtours des second, troisième, etc. feuillets, les températures seraient respectivement $a_1 f(0)$, $a_2 f(0)$, etc. Nous aurions alors construit une fonction représentant la distribution des températures dans la surface précédente.

Notre étude pourrait encore conduire à d'autres comparaisons.

Prenons d'abord une ordinaire série de Fourier construite dans l'intervalle de rang zéro pour y représenter une fonction de variable réelle $f(x)$. L'expression ainsi formée ne changera pas quand x augmentera d'un multiple de $\beta - \alpha$ et par suite elle est comparable à une fonction analytique *uniforme* dans une aire, laquelle ne change pas quand la variable tourne autour d'un point quelconque de cette aire.

De même $f(x)$ représenté par une série (B) se multiplie par certaines constantes quand on passe d'un intervalle à un autre; elle est ainsi comparable à une fonction analytique dans le voisinage d'un point de ramification, car une telle fonction se multiplie aussi par certaines constantes quand la variable tourne autour dudit point.

Si la constante ψ est commensurable avec 2π (*voir* n° **10**) les différents facteurs constants de $f(x)$ seront en nombre fini et nous serons dans un cas analogue à celui de la fonction multiforme à un nombre fini de branches z^{μ}. Dans le cas tout à fait général, les fonctions représentées par des séries qui les modifient complètement quand la variable change d'intervalle, pourront être comparées aux fonctions analytiques dont les déterminations se modifient de même quand la variable tourne autour de certains points singuliers.

NOTE. — Depuis que ce Mémoire est écrit (février 1907), j'ai obtenu de très grands perfectionnements quant à la sommabilité des séries (*Comptes rendus,* 2 avril et 14 octobre 1907; *Bulletin des Sciences mathématiques,* juin et décembre 1907). Dans le *Bulletin* de décembre on trouvera notamment une formule de sommabilité concernant les séries de Laurent et des premières indications sur la possibilité d'en faire une formule concernant les séries de Fourier, car les nouveaux résultats, obtenus d'abord dans le champ complexe, peuvent se transporter dans le champ réel. Ils entraîneront d'autres publications où les nos 21 et suivants du présent Mémoire seront considérablement généralisés. On trouvera une Note toute récente *Sur la sommabilité des séries de Fourier* dans les *Comptes rendus* du 13 janvier 1908.

Sur les équations aux intégrales réciproques;

Par M. C. POPOVICI.

Dans le présent Mémoire je vais exposer une question qui offre un intérêt spécial, par le fait qu'elle regarde à la fois l'Analyse, la Géométrie et la Mécanique, et aussi par les rapports de symétrie qui existent entre les différentes conséquences qu'elle entraîne.

Mon étude est divisée en deux Parties. Dans la première Partie je traite le problème au point de vue de l'Analyse et de la Géométrie avec les applications qu'il offre à la théorie des groupes. Dans la deuxième je donne l'interprétation mécanique du problème.

Une partie de ces résultats a été communiquée à l'Académie des Sciences (22 avril 1907) et le cas de deux variables a été développé dans un article paru dans le *Bulletin de la Société mathématique* (T. XXXV, fasc. II).

PREMIÈRE PARTIE.

I. Nous appellerons *équations aux intégrales réciproques* deux systèmes d'équations différentielles :

$$(1)\qquad \frac{dx_1}{u_1} = \ldots = \frac{dx_{n-1}}{u_{n-1}} = dx_n,$$

$$(2)\qquad \frac{dx_1}{v_1} = \ldots = \frac{dx_{n-1}}{v_{n-1}} = dx_n,$$

où $v_1, \ldots, v_{n-1}$ sont le système fondamental d'intégrales premières des

équations (1) et $u_1, \ldots, u_{n-1}$ le système fondamental d'intégrales premières des équations (2).

Pour trouver un système de fonctions u et v satisfaisant à notre problème, nous devons intégrer le système de $2(n-1)$ équations aux dérivées partielles non linéaires suivantes :

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_1 \dfrac{\partial v_k}{\partial x_1} + \ldots + u_{n-1} \dfrac{\partial v_k}{\partial x_{n-1}} + \dfrac{\partial v_k}{\partial x_n} = 0, \\ v_1 \dfrac{\partial u_k}{\partial x_1} + \ldots + v_{n-1} \dfrac{\partial u_k}{\partial x_{n-1}} + \dfrac{\partial u_k}{\partial x_n} = 0 \\ \qquad (k = 1, \ldots, n-1). \end{array}\right.$$

Je vais démontrer d'abord que, quel que soit le procédé par lequel on obtienne un système de solutions, les $2(n-1)$ relations finies qui les définissent sont toujours réductibles à la forme

$$(4)\qquad x_k = F_k(u_1, \ldots, u_{n-1}) + \Phi_k(v_1, \ldots, v_{n-1}) \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

$$(5)\qquad \lambda_j(u_1, \ldots, u_{n-1}) = \mu_j(v_1, \ldots, v_{n-1}) \qquad (j = 2, \ldots, n-1).$$

Nous arriverons à ce résultat même par des conclusions remarquables.

Considérons, tout d'abord, les deux équations linéaires suivantes :

$$(6)\qquad U(z) = u_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + u_{n-1} \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

$$(7)\qquad V(z) = v_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + v_{n-1} \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

$u_1, \ldots, u_{n-1}$; $v_1, \ldots, v_{n-1}$ étant des solutions supposées connues du problème.

Ces deux équations sont en involution.

En effet, on a

$$U[V(z)] - V[U(z)] = \sum_{k=1}^{k=n-1} [U(v_k) - V(u_k)] \frac{\partial z}{\partial x_k}.$$

Cette expression est identiquement nulle en vertu des équations (3).

Il résulte, d'après la théorie de Jacobi et Mayer, que *les équations* $U(z) = 0$ et $V(z) = 0$ *admettent* $n-2$ *intégrales communes.*

Les relations (5) sont déjà établies.

Une conséquence géométrique de ce dernier résultat, c'est que *les deux congruences de caractéristiques*

$$u_1 = a_1, \ldots, u_{n-1} = a_{n-1}, \qquad v_1 = b_1, \ldots, v_{n-1} = b_{n-1}$$

admettent une famille de surfaces à deux dimensions communes :

$$(8) \quad k_2 = \lambda_2(u_1, \ldots, u_{n-1}), \quad \ldots, \quad k_{n-1} = \lambda_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1}),$$
$$(9) \quad k_2 = \mu_2(v_1, \ldots, v_{n-1}), \quad \ldots, \quad k_{n-1} = \mu_{n-1}(v_1, \ldots, v_{n-1}).$$

Ces surfaces dépendent de $n - 2$ paramètres $k_2, \ldots, k_{n-1}$; nous les appellerons *surfaces intégrales communes.*

Voyons maintenant comment sont distribués sur chacune de ces surfaces les deux faisceaux de courbes u et v. Pour cela remarquons que, pendant un déplacement suivant une courbe $u_i = a_i$ caractéristique du système (2), toutes les courbes $v_i = b_i$ qui la rencontrent ont leurs tangentes parallèles aux points d'intersection; en outre, les cosinus directeurs de ces tangentes sont exprimés précisément par les nombres

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2 + 1}}, \quad \ldots, \quad \frac{a_{n-1}}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2 + 1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2 + 1}}.$$

Il en résulte que *les caractéristiques constituent deux faisceaux de courbes de translation sur chaque surface intégrale commune;* ces surfaces sont par conséquent des surfaces de translation et s'expriment par des relations de la forme

$$(10) \qquad x_k = f_k(u; k_2, \ldots, k_{n-1}) + \varphi_k(v; k_2, \ldots, k_{n-1})$$
$$(k = 1, \ldots, n);$$

u désignera une fonction arbitraire de $u_1, \ldots, u_{n-1}$ et v une fonction arbitraire de $v_1, \ldots, v_{n-1}$; les paramètres $k_2, \ldots, k_{n-1}$ seront les indices d'une telle surface dans l'espace à n dimensions.

Pour des valeurs constantes des $k_2, \ldots, k_{n-1}$, les équations (8), (9) ou (10) nous représentent la même surface; en vertu de ces équations la famille de surfaces (10) peut s'exprimer sous la forme (4), (5).

Ces équations expriment que les caractéristiques intégrales de l'une des équations $U(z) = 0$, par exemple, sont engendrées par le mouvement de translation d'une surface

$$(F) \qquad x_1^1 = F_1(u_1, \ldots, u_{n-1}), \qquad \ldots, \qquad x_n^1 = F_n(u_1, \ldots, u_{n-1})$$

sur une surface fixe

$$(\Phi) \qquad x_1^2 = \Phi_1(v_1, \ldots, v_{n-1}), \qquad \ldots, \qquad x_n^2 = \Phi_n(v_1, \ldots, v_{n-1}),$$

ce mouvement n'étant pas arbitraire, mais réglé par les équations (5) qui expriment une correspondance entre les courbes de la surface F et celles de la surface Φ, de telle façon que, lorsque la surface F glisse sur une courbe

$$k_2 = \mu_2(v_1, \ldots, v_{n-1}), \qquad \ldots, \qquad k_{n-1} = \mu_{n-1}(v_1, \ldots, v_{n-1})$$

de la surface Φ, ce sont les points de la courbe correspondante

$$k_2 = \lambda_2(u_1, \ldots, u_{n-1}), \qquad \ldots, \qquad k_{n-1} = \lambda_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1}),$$

dont les trajectoires sont des caractéristiques du système (1). Nous appellerons pour cette raison les surfaces F et Φ *surfaces génératrices*.

II. Passons maintenant à l'intégration du système (3), c'est-à-dire à la recherche des fonctions F, Φ; λ et μ. Pour cela appliquons aux équations (4) et (5) les opérations $U(z)$ et $V(z)$ en tenant compte des équations (3). Nous aurons les relations

$$(11) \quad \begin{cases} u_1 = \sum_k F_1^k \; U(u_k), \\ \dots\dots\dots\dots, \\ u_{n-1} = \sum_k F_{n-1}^k \; U(u_k), \\ 1 = \sum_k F_n^k \; U(u_k), \\ 0 = \sum_k \lambda_j^k \; U(u_k), \end{cases} \qquad (12) \quad \begin{cases} v_1 = \sum_k \Phi_1^k \; V(v_k), \\ \dots\dots\dots\dots, \\ v_{n-1} = \sum_k \Phi_{n-1}^k \; V(v_k), \\ 1 = \sum_k \Phi_n^k \; V(v_k), \\ 0 = \sum_k \mu_j^k \; V(v_k), \end{cases}$$

où l'on a mis, pour abréger, $\frac{\partial F_i}{\partial u_k} = F_i^k$, etc.; $k = 1, \ldots, n-1$, $j = 2, \ldots, n-1$.

Pour que ces équations soient compatibles par rapport aux expressions $U(u_k)$ et $V(v_k)$, il faut que F_n et Φ_n soient des intégrales des équations linéaires

$$D = \begin{vmatrix} u_1 & F_1^1 & \ldots & F_1^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n-1} & F_{n-1}^1 & \ldots & F_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \frac{\partial F}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial F}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} v_1 & \Phi_1^1 & \ldots & \Phi_1^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n-1} & \Phi_{n-1}^1 & \ldots & \Phi_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} & \ldots & \frac{\partial \Phi}{\partial v_{n-1}} \end{vmatrix} = 0,$$

où les fonctions $F_1, \ldots, F_{n-1}$; $\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1}$ peuvent être choisies à notre gré; ce sont des fonctions arbitraires de l'intégration; quant aux fonctions $\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$; $\mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$, elles doivent être des intégrales des équations homogènes correspondantes,

$$D_0 = \begin{vmatrix} u_1 & F_1^1 & \ldots & F_1^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n-1} & F_{n-1}^1 & \ldots & F_{n-1}^{n-1} \\ 0 & \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial \lambda}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_0 = \begin{vmatrix} v_1 & \Phi_1^1 & \ldots & \Phi_1^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n-1} & \Phi_{n-1}^1 & \ldots & \Phi_{n-1}^{n-1} \\ 0 & \frac{\partial \mu}{\partial v_1} & \ldots & \frac{\partial \mu}{\partial v_{n-1}} \end{vmatrix} = 0.$$

Le problème est ainsi réduit à l'intégration de deux équations linéaires à $n-1$ variables D et Δ. On pourrait, par cette méthode, trouver une infinité d'intégrales des équations réciproques; mais nous allons voir qu'il n'est pas besoin d'intégrer aucune équation pour avoir des solutions satisfaisant à notre problème.

A cet effet, proposons-nous de résoudre le problème qui correspond à deux surfaces génératrices données d'avance,

$$x_n^1 = F(x_1^1, \ldots, x_{n-1}^1); \qquad x_n^2 = \Phi(x_1^2, \ldots, x_{n-1}^2);$$

cela revient à se donner déjà une intégrale de chaque équation D et Δ.

On peut résoudre d'un seul coup le problème par rapport à un

groupe de $2(n-1)$ surfaces génératrices associées,

$$x_n^1 = F^i(x_1^1, \ldots, x_{n-1}^1), \qquad x_n^2 = \Phi^i(x_1^2, \ldots, x_{n-1}^2)$$
$$(i = 1, \ldots, n-1),$$

c'est-à-dire en se donnant d'avance $n-1$ intégrales des équations D et Δ, et chercher les fonctions $F_k(u_1, \ldots, u_{n-1})$, $\Phi_k(v_1, \ldots, v_{n-1})$, ou, en d'autres termes, la représentation paramétrique de ces surfaces qui correspond à notre problème.

En prenant comme variables $x_1^1, \ldots, x_n^1$ et $x_1^2, \ldots, x_n^2$, les équations D et Δ peuvent s'écrire (¹)

$$\left(u_1 \frac{\partial F}{\partial x_1^1} + \ldots + u_{n-1} \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}^1} + 1\right) \frac{D(F_1, \ldots, F_{n-1})}{D(u_1, \ldots, u_{n-1})} = 0,$$
$$\left(v_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1^2} + \ldots + v_{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-1}^2} + 1\right) \frac{D(\Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1})}{D(v_1, \ldots, v_{n-1})} = 0;$$

comme $F_1, \ldots, F_{n-1}$; $\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1}$ désignent des variables indépendantes, on obtient, en exprimant que F^i et Φ^i sont des intégrales, les équations

$$\left.\begin{aligned} &(13) \quad u_1 \frac{\partial F^i}{\partial x_1^1} + \ldots + u_{n-1} \frac{\partial F_i^i}{\partial x_{n-1}^1} + 1 = 0 \\ &(14) \quad v_1 \frac{\partial \Phi^i}{\partial x_1^2} + \ldots + v_{n-1} \frac{\partial \Phi^i}{\partial x_{n-2}^1} + 1 = 0 \end{aligned}\right\} (i = 1, \ldots, n-1).$$

Ces équations nous donnent $u_1, \ldots, u_{n-1}$ et $v_1, \ldots, v_{n-1}$ en fonction des x_k^1 et x_k^2; mais si l'on veut avoir le problème résolu par rapport aux deux surfaces génératrices,

$$x_n^1 = F^i(x_1^1, \ldots, x_{n-1}^1), \qquad x_n^2 = \Phi^i(x_1^2, \ldots, x_{n-1}^2),$$

les équations (13), (14) et ces deux dernières nous donnent $x_1^1, \ldots, x_n^1$

(¹) En effet, on a

$$D = u_1 \frac{D(F_2, \ldots, F_{n-1} F)}{D(u_1, \ldots, u_{n-1})} + \ldots + u_{n-1} \frac{D(F_1, \ldots, F_{n-2} F)}{D(u_1, \ldots, u_{n-1})} + \frac{D(F_1, \ldots, F_{n-1})}{D(u_1, \ldots, u_{n-1})}$$
$$= \left(u_1 \frac{\partial F}{\partial F_1} + \ldots + u_{n-1} \frac{\partial F}{\partial F_{n-1}} + 1\right) \frac{D(F_1, \ldots, F_{n-1})}{D(u_1, \ldots, u_{n-1})}.$$

et $x_1^2, \ldots, x_n^2$; c'est-à-dire $F_1, \ldots, F_n$ et $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ en fonction de $u_1, \ldots, u_{n-1}$ et $v_1, \ldots, v_{n-1}$.

Quant aux fonctions $\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$; $\mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$, ce sont des intégrales des équations

$$u_1 \frac{\partial \lambda}{\partial x_1^1} + \ldots + u_{n-1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_{n-1}^1} = 0, \qquad v_1 \frac{\partial \mu}{\partial x_1^2} + \ldots + v_{n-1} \frac{\partial \mu}{\partial x_{n-1}^2} = 0;$$

par suite, les λ et μ seront des fonctions des expressions $F^i - F^k$ et $\Phi^i - \Phi^k$ que l'on a exprimées en fonction de u et v. On aura, par suite, comme intégrales communes les relations

$$L_j(F^1 - F^2, \ldots, F^1 - F^{n-1}) = M_j(\Phi^1 - \Phi^2, \ldots, \Phi^1 - \Phi^{n-1})$$
$$(j = 2, \ldots, n-1),$$

où les fonctions L_j et M_j peuvent être choisies arbitrairement; ce fait exprime que nous sommes libres de choisir, à notre gré, la correspondance entre les courbes des deux surfaces génératrices par rapport auxquelles on se propose d'exprimer les intégrales.

III. Considérons le système d'équations non linéaires suivantes :

$$(3)' \quad \begin{cases} A(u_k) = A_1(u_1, \ldots, u_{n-1}) \dfrac{\partial v_k}{\partial x_1} + \ldots + A_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1}) \dfrac{\partial v_k}{\partial x_{n-1}} + \dfrac{\partial v_k}{\partial x_n} = 0, \\ B(v_k) = B_1(v_1, \ldots, v_{n-1}) \dfrac{\partial u_k}{\partial x_1} + \ldots + B_{n-1}(v_1, \ldots, v_{n-1}) \dfrac{\partial u_k}{\partial x_{n-1}} + \dfrac{\partial u_k}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$
$$(k = 1, \ldots, n-1),$$

les fonctions données $A_1, \ldots, A_{n-1}$; $B_1, \ldots, B_{n-1}$ étant supposées distinctes.

Ce système peut aussi s'intégrer par les méthodes données précédemment. On peut d'ailleurs le réduire à la même forme que les équations (3), en prenant comme inconnues les expressions A et B, et ainsi l'on arrive au système de $2(n-1)$ équations

$$A(B_k) = 0, \qquad B(A_k) = 0.$$

Les fonctions u et v jouissent des mêmes propriétés générales que les intégrales des équations (3), à savoir : elles peuvent se déterminer

sans aucune quadrature; les équations linéaires

$$A(z)=A_1(u_1,\ldots,u_{n-1})\frac{\partial z}{\partial x_1}+\ldots+A_{n-1}(u_1,\ldots,u_{n-1})\frac{\partial z}{\partial x_{n-1}}+\frac{\partial z}{\partial x_n}=0,$$

$$B(z)=B_1(v_1,\ldots,v_{n-1})\frac{\partial z}{\partial x_1}+\ldots+B_{n-1}(v_1,\ldots,v_{n-1})\frac{\partial z}{\partial x_{n-1}}+\frac{\partial z}{\partial x_n}=0$$

sont en involution; les deux congruences de caractéristiques u et v admettent une famille de surfaces intégrales communes, sur lesquelles les deux faisceaux de courbes u et v sont des courbes de translation.

Les intégrales se présentent sous la même forme (4), (5); en leur appliquant les opérations A et B, on obtient les équations

$$(11)' \qquad \left\{\begin{aligned} A_i &= \sum_k F_i^k A(u_k),\\ 0 &= \sum_k \lambda_j^k A(u_k),\end{aligned}\right.$$

$$(12)' \qquad \left\{\begin{aligned} B_i &= \sum_k \Phi_i^k B(v_k),\\ 0 &= \sum_k \mu_j^k B(v_k),\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} k &= 1,\ldots,n,\\ A_n &= B_n = 1,\\ j &= 2,\ldots,n-1.\end{aligned}\right.$$

Les fonctions F et Φ sont déterminées par les équations

$$D=\begin{vmatrix} A_1 & F_1^1 & \ldots & F_1^{n-1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ A_{n-1} & F_{n-1}^1 & \ldots & F_{n-1}^{n-1}\\ 1 & F_n^1 & \ldots & F_n^{n-1}\end{vmatrix}=0,\qquad \Delta=\begin{vmatrix} B_1 & \Phi_1^1 & \ldots & \Phi_1^{n-1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ B_{n-1} & \Phi_{n-1}^1 & \ldots & \Phi_{n-1}^{n-1}\\ 1 & \Phi_n^1 & \ldots & \Phi_n^{n-1}\end{vmatrix}=0$$

et les fonctions λ et μ par les équations homogènes correspondantes.

Une propriété géométrique intéressante est la suivante :

Il existe un ensemble de points formant une courbe suivant lesquels les deux congruences de caractéristiques se raccordent.

Cette courbe est donnée par les équations

$$A_1(u_1, \ldots, u_{n-1}) = B_1(v_1, \ldots, v_{n-1}), \qquad \ldots,$$
$$A_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1}) = B_{n-1}(v_1, \ldots, v_{n-1}).$$

Cet ensemble peut constituer même une surface à p dimensions si p de ces équations se trouvent parmi les $n-2$ intégrales communes des équations $A(z)$ et $B(z)$, ou plus généralement si les équations de notre courbe se réduisent seulement à $n-p-1$ équations distinctes, en vertu des $n-2$ relations qui constituent les intégrales communes. Si une caractéristique u traverse cet espace en un point $x_1^0, \ldots, x_n^0$, la caractéristique v, qui passe par ce même point, le traverse aussi avec la même tangente. Si la caractéristique u contient un arc entier situé dans cet espace, toutes les caractéristiques v qui la rencontrent en un point de cet arc auront une portion commune avec la caractéristique u qui sera constituée par cet arc dans toute sa longueur.

Les équations réciproques et la théorie des groupes.

Les intégrales des équations réciproques jouissent de belles propriétés au point de vue de la théorie des groupes que nous allons diviser en deux catégories :

1° Groupes d'opérations qui transforment un système donné d'intégrales en un nouveau système d'intégrales des mêmes équations linéaires;

2° Groupes qui transforment un système d'intégrales en un nouveau système appartenant aux équations non linéaires.

Cette dernière propriété nous permettra de déduire d'un système de solutions connues une infinité de solutions dépendant des fonctions arbitraires.

Nous allons démontrer, en outre, que ces opérations forment un groupe, non seulement au point de vue de transformer les intégrales les unes dans les autres, mais que le produit de plusieurs opérations peut être remplacé par une seule. On obtient, par ces transformations, des intégrales appartenant à un même groupe.

I. Considérons le système général de $2(n-1)$ équations $(3)'$. De

ces équations nous avons déduit les équations (11)′ et (12)′ qui, résolues par rapport aux expressions $A(u_k)$ et $B(v_k)$, nous donnent des relations de la forme

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & A_1(u_1, \ldots, u_{n-1}) \frac{\partial u_k}{\partial x_1} + \ldots + A_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1}) \frac{\partial u_k}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \\ & \quad = a_k(u_1, \ldots, u_{n-1}), \\ & B_1(v_1, \ldots, v_{n-1}) \frac{\partial v_k}{\partial x_1} + \ldots + B_{n-1}(v_1, \ldots, v_{n-1}) \frac{\partial v_k}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial v_k}{\partial x_n} \\ & \quad = b_k(v_1, \ldots, v_{n-1}). \end{aligned} \right.$$

Ces relations expriment que *les fonctions* $u_1, \ldots, u_{n-1}, v_1, \ldots, v_{n-1}$ *forment un groupe par rapport aux opérations* $A(z)$ et $B(z)$.

Toutes les fonctions $F(u_1, \ldots, u_{n-1})$, $\Phi(v_1, \ldots, v_{n-1})$ font partie du groupe. Quelle que soit une fonction $H(u_1, \ldots, u_{n-1})$, il existe une fonction $F(u_1, \ldots, u_{n-1})$ qui donne

$$A[F(u_1, \ldots, u_{n-1})] = H(u_1, \ldots, u_{n-1}).$$

On n'a qu'à chercher une intégrale de l'équation

$$a_1(u_1, \ldots, u_{n-1}) \frac{\partial F}{\partial u_1} + \ldots + a_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1}) \frac{\partial F}{\partial u_{n-1}} = H(u_1, \ldots, u_{n-1}).$$

Pour $H = 0$ on obtient les intégrales communes des équations $A(z)$ et $B(z)$. Si nous répétons sur $a_k(u_1, \ldots, u_{n-1})$ et $b_k(v_1, \ldots, v_{n-1})$ les opérations $A(z)$ et $B(z)$, nous obtenons évidemment des intégrales des mêmes équations linéaires $B(z) = 0$ et $A(z) = 0$.

Il est intéressant de démontrer directement cette propriété que les fonctions u et v forment un groupe.

A cet effet, remarquons que, les équations linéaires étant en involution, nous pouvons écrire

$$\left. \begin{aligned} A[B(u_k)] - B[A(u_k)] = 0 \\ A[B(v_k)] - B[A(v_k)] = 0 \end{aligned} \right\} \qquad (k = 1, \ldots, n-1).$$

Or, comme on a

$$A(v_k) = 0, \qquad B(u_k) = 0,$$

il en résulte

$$B[A(u_k)] = 0, \qquad A[B(v_k)] = 0.$$

Donc les expressions $A(u_k)$ sont encore des intégrales de l'équation $B(z) = 0$ et $B(v_k)$ des intégrales de l'équation $A(z) = 0$. Il s'ensuit que l'on aura

$$A(u_k) = a_k(u_1, \ldots, u_{n-1}), \qquad B(v_k) = b_k(v_1, \ldots, v_{n-1}).$$

Ces intégrales ne forment pas toujours des systèmes fondamentaux, les fonctions a_k et b_k n'étant pas nécessairement distinctes.

II. Nous sommes en possession d'un nouveau moyen d'intégrer le système (3)'. Remarquons, en effet, que notre problème se réduit à l'intégration du système (1) qui a l'avantage sur le précédent d'être séparé par rapport aux inconnues $u_1, \ldots, u_{n-1}$, d'une part, et $v_1, \ldots, v_{n-1}$, de l'autre.

Les $2(n-1)$ équations non homogènes (1) sont en réalité des *intégrales intermédiaires* du système (3)' et les fonctions $a_1, \ldots, a_{n-1}$, $b_1, \ldots, b_{n-1}$ sont des fonctions arbitraires de l'intégration.

Pour trouver les fonctions $u_1, \ldots, u_{n-1}$, nous sommes conduits à considérer le système de caractéristiques suivant :

$$(2) \qquad \frac{dx_1}{A_1} = \ldots = \frac{dx_{n-1}}{A_{n-1}} = dx_n = \frac{du_1}{a_1} = \ldots = \frac{du_{n-1}}{a_{n-1}}.$$

Désignons les $n-2$ intégrales des dernières $n-2$ équations caractéristiques par

$$(3) \quad u_2 = \lambda^2(u_1; k_2, \ldots, k_{n-1}), \quad \ldots, \quad u_{n-1} = \lambda^{n-1}(u_1; k_2, \ldots, k_{n-1}).$$

Remplaçons dans $a_1, A_1, \ldots, A_{n-1}$ les expressions $u_2, \ldots, u_{n-1}$ par ces valeurs et désignons par $a_1^k, A_1^k, \ldots, A_{n-1}^k$ les expressions ainsi obtenues.

Considérons enfin les intégrales

$$I_1 = \int \frac{A_1^k du_1}{a_1^k}, \qquad \ldots, \qquad I_{n-1} = \int \frac{A_{n-1}^k du_1}{a_1^k}, \qquad I_n = \int \frac{du_1}{a_1^k}.$$

Les fonctions $u_1, \ldots, u_{n-1}$ intégrales des équations

$$A(u_k) = a_k(u_1, \ldots, u_{n-1})$$

seront données par des équations de la forme

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi_k[x_1 - I_1(u_1, \ldots, u_{n-1}), \ldots, x_n - I_n(u_1, \ldots, u_{n-1}), \\ \qquad \lambda_2(u_1, \ldots, u_{n-1}), \ldots, \lambda_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1})] = 0 \end{array} \right.$$
$$(k = 1, \ldots, n-1),$$

où $\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ sont les valeurs de $k_2, \ldots, k_{n-1}$ tirées des équations (3); on suppose également que l'on ait remplacé dans les intégrales effectuées $I_1, \ldots, I_n$ les expressions $k_2, \ldots, k_{n-1}$ par ces valeurs. Quant aux fonctions Π_k, elles sont arbitraires tant que les fonctions $b_k(v_1, \ldots, v_{n-1})$ ne sont pas données; autrement elles dépendent exclusivement de la forme de ces fonctions.

Pour une détermination des fonctions $u_1, \ldots, u_{n-1}$, la deuxième série d'intégrales $v_1, \ldots, v_{n-1}$ sera donnée par les relations

$$(5) \quad \frac{B_1(v_1, \ldots, v_{n-1})}{\dfrac{D(u_1, \ldots, u_{n-1})}{D(x_2, \ldots, x_n)}} = \ldots = \frac{B_{n-1}(v_1, \ldots, v_{n-1})}{\dfrac{D(u_1, \ldots, u_{n-1})}{D(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_n)}} = \frac{1}{\dfrac{D(u_1, \ldots, u_{n-1})}{D(x_1, \ldots, x_{n-1})}}.$$

III. Pour justifier notre méthode il faut démontrer que les fonctions $v_1, \ldots, v_{n-1}$ sont en réalité des intégrales de l'équation $A(z) = 0$, et cela quelles que soient les fonctions $a_1, \ldots, a_{n-1}$, dont nous avons affirmé, sans le démontrer, que l'on est libre de les prendre arbitraires.

Cela va résulter du théorème suivant, plus général, qui contient la réciproque de ce que nous venons d'établir et qui est très remarquable par son dualisme :

Si les fonctions $u_1, \ldots, u_{n-1}$ forment un groupe par rapport à l'opération

$$U(z) = u_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + u_{n-1} \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial z}{\partial x_n},$$

alors :

1° *Les fonctions*

$$v_k = \frac{\Delta(u, x_k)}{\Delta(u, x_{n-1})}, \qquad \left[\Delta(u, x_k) = \frac{D(u_1, \ldots, u_{n-1})}{D(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)}\right]$$

$$(k = 1, \ldots, n-1)$$

forment aussi un groupe par rapport à l'opération

$$V(z) = v_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + v_{n-1} \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

2° *Les deux groupes de fonctions* $u_1, \ldots, u_{n-1}$, $v_1, \ldots, v_{n-1}$ *admettent un sous-groupe d'ordre* $n-2$ *commun.*

3° *Les équations* $U(z) = 0$ *et* $V(z) = 0$ *sont en involution.*

4° *Chacune de ces équations admet* $n-2$ *intégrales fonctions de ses coefficients, et ces intégrales sont justement les solutions communes des équations considérées.*

5° *Les fonctions* $u_1, \ldots, u_{n-1}$ *sont les intégrales de l'équation* $V(z) = 0$, *et* $v_1, \ldots, v_{n-1}$ *les intégrales de l'équation* $U(z) = 0$.

Considérons l'expression

$$U[V(z)] - V[U(z)] = H(z).$$

On a, par hypothèse,

$$U(u_k) = a_k(u_1, \ldots, u_{n-1})$$

et

$$V(u_k) = 0$$

par la définition même des fonctions v.

Il en résulte

$$H(u_k) = 0.$$

Or

$$H(z) = \sum [U(v_k) - V(u_k)] \frac{\partial z}{\partial x_k}.$$

On aura donc les $n-1$ équations

$$U(v_1) \frac{\partial u_k}{\partial x_1} + \ldots + U(v_{n-1}) \frac{\partial u_k}{\partial x_{n-1}} = 0.$$

On suppose

$$\frac{D(u_1, \ldots, u_{n-1})}{D(x_1, \ldots, x_{n-1})} \neq 0,$$

car autrement les quantités $v_1, \ldots, v_{n-1}$ seraient infinies.

Il s'ensuit que l'on aura forcément

$$U(v_1) = 0, \qquad \ldots, \qquad U(v_{n-1}) = 0.$$

La dernière partie de notre théorème est démontrée.

Il en résulte que l'on aura $H(z) = 0$. Donc $U(z)$ et $V(z)$ forment un système en involution, ce qui donne

$$U[V(v_k)] - V[U(v_k)] = 0.$$

Or

$$U(v_k) = 0.$$

Donc

$$V(v_k) = b_k(v_1, \ldots, v_{n-1}).$$

Les fonctions v forment aussi un groupe par rapport à l'opération $V(z)$.

Enfin, on voit aisément que les $n-2$ intégrales de chacune des équations

$$a_1(u_1, \ldots, u_{n-1})\frac{\partial\lambda}{\partial u_1} + \ldots + a_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1})\frac{\partial\lambda}{\partial u_{n-1}} = 0,$$

$$b_1(v_1, \ldots, v_{n-1})\frac{\partial\mu}{\partial v_1} + \ldots + b_{n-1}(v_1, \ldots, v_{n-1})\frac{\partial\mu}{\partial v_{n-1}} = 0$$

sont des intégrales communes des équations $U(z) = 0$, $V(z) = 0$ et fonctions des coefficients mêmes de ces équations.

Ces conclusions subsistent aussi dans le cas où les fonctions $u_1, \ldots, u_{n-1}$ forment un groupe par rapport à une opération $A(z)$.

IV. Ce théorème nous impose logiquement le problème suivant :

Étant donné un système de fonctions $u_1, \ldots, u_{n-1}$, reconnaître s'il existe un système de fonctions

$$A_1(u_1, \ldots, u_{n-1}), \quad \ldots, \quad A_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1})$$

telles que les fonctions $u_1, \ldots, u_{n-1}$ *forment un groupe par rapport à l'opération*

$$A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + A_{n-1} \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

Pour trouver si ces fonctions existent, remarquons que les fonctions

$$v_k = \frac{\Delta(u, x_k)}{\Delta(u, x_{n-1})}$$

doivent être, dans ce cas, les intégrales de l'équation $A(z) = 0$.

Supposons que ces fonctions soient distinctes. Alors, les fonctions

$$A_1(u_1, \ldots, u_{n-1}) = A_1(x_1, \ldots, x_n), \qquad \ldots,$$
$$A_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1}) = A_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)$$

seront données par les équations

$$A_k(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \frac{\Delta(v, x_k)}{\Delta(v, x_{n-1})}$$

et ces fonctions elles-mêmes seront les intégrales de l'équation

$$V(z) = 0.$$

Ainsi, il existe un système de fonctions $A_1(u_1, \ldots, u_{n-1}), \ldots, A_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1})$ de la nature indiquée, si les identités

$$A_1(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial v_k}{\partial x_1} + \ldots + A_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial v_k}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial v_k}{\partial x_n} = 0$$
$$(k = 1, \ldots, n-1)$$

sont vérifiées.

Le problème se réduit donc à la vérification des identités *rationnelles* par rapport aux expressions données $u_1, \ldots, u_{n-1}$.

Enfin, si dans les expressions $A_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, A_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)$ on prend comme variables $u_1, \ldots, u_{n-1}, x_n$, la variable x_n disparaîtra et l'on aura les fonctions cherchées $A_1, \ldots, A_{n-1}$ en fonction de $u_1, \ldots, u_{n-1}$, dans le cas où nous avons appris qu'elles existent.

V. Dans le cas particulier où le nombre des variables est pair, soit $2n$, et où l'expression

$$A_1 dx_{2n} - A_2 dx_{2n-1} + \ldots + A_{2n-1} dx_2 - dx_1$$

admet un facteur intégrant, nous tombons sur des groupes de Lie.

Désignons par u l'intégrale que l'on obtient avec un facteur intégrant. On a les parenthèses de Poisson :

$$(u\varphi_i) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 2n-1),$$
$$(\varphi_i \varphi_k) = b_{i,k}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n-1}) \qquad (i, k = 1, \ldots, 2n-1).$$

D'après le théorème fondamental de Lie, le système d'équations

$$(\varphi_1 z) = 0, \qquad \ldots, \qquad (\varphi_{2n-1} z) = 0$$

doit être en involution. On voit bien que u est l'intégrale commune.

Remarquons que u doit être une fonction de $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n-1}$, car on a

$$(uu) \equiv 0.$$

VI. Nous allons résoudre maintenant le problème suivant :

Étant donné un système de fonctions $u_1, \ldots, u_{n-1}$ satisfaisant aux relations

$$A_1(u_1, \ldots, u_{n-1}) \frac{\partial u_k}{\partial x_1} + \ldots$$
$$+ A_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1}) \frac{\partial u_k}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial u_k}{\partial x_n} = a_k(u_1, \ldots, u_{n-1}),$$

trouver les surfaces de translation (surfaces génératrices et surfaces intégrales communes) qui correspondent à ces fonctions.

On se propose de trouver la solution du problème sous la forme

$$x_i = F_i(u_1, \ldots, u_{n-1}) + \Phi_i(v_1, \ldots, v_{n-1}),$$
$$\lambda_j(u_1, \ldots, u_{n-1}) = \mu_j(v_1, \ldots, v_{n-1}).$$

D'après les équations connues (11)′, on voit que les fonctions F_i

sont respectivement des intégrales des équations

$$a_1 \frac{\partial F_i}{\partial u_1} + \ldots + a_{n-1} \frac{\partial F_i}{\partial u_{n-1}} = A_i$$

et les fonctions λ_j des intégrales de l'équation

$$a_1 \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} + \ldots + a_{n-1} \frac{\partial \lambda}{\partial u_{n-1}} = 0.$$

Ces intégrales ne peuvent pas être prises arbitrairement; elles dépendent de la forme sous laquelle on nous donne les fonctions $u_1, \ldots, u_{n-1}$.

Supposons que ces fonctions soient données sous la forme (4). On peut considérer ces équations comme le résultat de l'élimination de $v_1, \ldots, v_{n-1}$ entre les équations

$$\Phi_i = x_i - F_i, \qquad \mu_j = \lambda_j.$$

Alors, on prendra [1]

$$F_i(u_1, \ldots, u_{n-1}) = I_i(u_1, \ldots, u_{n-1}).$$

Pour achever le problème, on exprimera Φ_i et μ_j en fonction de $x_1, \ldots, x_n$ à l'aide des fonctions connues $u_1, \ldots, u_{n-1}$. On déduira $x_1, \ldots, x_{n-1}$ à l'aide des formules (5) en fonction de x_n; $v_1, \ldots, v_{n-1}$, et en remplaçant dans Φ_i et μ_j la variable x_n disparaîtra et nous aurons enfin ces dernières expressions en fonction de $v_1, \ldots, v_{n-1}$.

VII. Les intégrales des équations non linéaires jouissent encore des propriétés remarquables, au point de vue de la transformation, d'un

---

(1) Cette détermination n'est pas la seule possible, car on peut mettre les équations (4) sous la forme

$$\pi_i^h[x_1 - I_1 - h_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}), \ldots, x_n - I_n - \lambda_n(\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}); \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}] = 0$$
$$(i = 1, \ldots, n-1);$$

mais les surfaces intégrales communes seront toujours les mêmes, car elles sont déterminées avec la congruence de courbes $u_1, \ldots, u_{n-1}$.

système d'intégrales en un nouveau système. Ce dernier ne correspondra plus aux mêmes équations linéaires.

Voici ces propriétés :

1° *Si le système de* $2(n-1)$ *fonctions*

$$u_1(x_1, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad u_{n-1}(x_1, \ldots, x_n),$$
$$v_1(x_1, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad v_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)$$

constitue un système d'intégrales des équations réciproques, les fonctions

$$u_1(\rho x_1 + \xi_1, \ldots, \rho x_n + \xi_n), \quad \ldots, \quad u_{n-1}(\rho x_1 + \xi_1, \ldots, \rho x_n + \xi_n),$$
$$v_1(\rho x_1 + \xi_1, \ldots, \rho x_n + \xi_n), \quad \ldots, \quad v_{n-1}(\rho x_1 + \xi_1, \ldots, \rho x_n + \xi_n),$$

$\rho, \xi_1, \ldots, \xi_n$ *étant des constantes, nous donneront un nouveau système d'intégrales des équations réciproques.*

Il suffit de regarder la forme des équations différentielles (3) ou (3)' pour voir que les nouvelles fonctions sont aussi des intégrales si les premières le sont.

Nous exprimerons cette propriété en disant que *les intégrales des équations réciproques admettent comme groupe de transformations l'homothétie et la translation.* Nous avons ainsi déduit du système connu d'intégrales un nouveau système dépendant de $n+1$ constantes arbitraires.

On voit bien que ces transformations forment un groupe par rapport à elles-mêmes; p transformations successives d'indices ρ^1; ξ_1^1, $\ldots$, ξ_1^n; $\ldots$, ρ^p; ξ_1^p, $\ldots$, ξ_n^p sont équivalentes à la transformation unique dont les indices sont

$$\rho^p \rho^{p-1} \ldots \rho^1; \quad \xi_1^p + \rho^p \xi_1^{p-1} + \ldots + \rho^p \rho^{p-1} \ldots \rho^2 \xi_1^1, \quad \ldots,$$
$$\xi_n^p + \rho^p \xi_n^{p-1} + \ldots + \rho^p \rho^{p-1} \ldots \rho^2 \xi_n^1.$$

2° *Si les fonctions* $u_1(x_1, \ldots, x_n)$, etc., *sont un système connu l'intégrales des équations non linéaires et les fonctions*

$$k_2(x_1, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad k_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)$$

sont les intégrales communes des équations linéaires correspondantes, alors on obtient, par la substitution,

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho(K_2, \ldots, K_{n-1})X_1 + \xi_1(K_2, \ldots, K_{n-1}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad [K_i(x_1, \ldots, x_n) = k_i(X_1, \ldots, X_n)], \\ x_n &= \rho(K_2, \ldots, K_{n-1})X_n + \xi_1(K_2, \ldots, K_{n-1}) \end{aligned}$$

un nouveau système d'intégrales, quelles que soient les fonctions arbitraires ρ; $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Les nouvelles fonctions $K_i(x_1, \ldots, x_n)$ *seront aussi les intégrales communes.*

Pour démontrer cette propriété générale, nous allons désigner par $U(\bar{z})$ une opération U effectuée sur une fonction z dans laquelle on considère les fonctions $k_2, \ldots, k_{n-1}$ comme des constantes; c'est-à-dire la variation U de z, qui correspond à un déplacement suivant une surface intégrale commune. Désignons par U_i et V_i ce que deviennent u_i et v_i après la substitution.

Nous allons démontrer les relations

$$U(V_i) = U_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial V_i}{\partial x_1} + \ldots + U_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial V_i}{\partial x_n} + \frac{\partial V_i}{\partial x_n} = 0.$$

En effet,

$$U(V_i) = U(\overline{V_i}) + \sum_p \frac{\partial V_i}{\partial K_p} U(K_p).$$

En vertu de la première propriété, on a $U(\overline{V_i}) = 0$. Il nous reste à démontrer que l'on a $U(K_p) = 0$. Remarquons que, par hypothèse,

$$U_1 \frac{\partial K}{\partial X_1} + \ldots + U_{n-1}\frac{\partial K}{\partial X_{n-1}} + \frac{\partial K}{\partial X_n} = 0.$$

Désignons par $\overline{U}(K)$ une telle opération. Nous aurons

$$0 = \overline{U}(K) = \sum_i U_i \sum_r \frac{\partial K}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial X_i} \qquad i, r = 1, \ldots, \quad U_n = 1,$$

$$\frac{\partial x_r}{\partial X_i} = X_r \frac{\partial \rho}{\partial X_i} + \frac{\partial \xi_r}{\partial X_i},$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_i} = X_i \frac{\partial \rho}{\partial X_i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial X_i} + \rho.$$

Il résulte

$$o = \rho U(K) + \sum_r \frac{\partial K}{\partial x_r}[X_r \overline{U}(\rho) + \overline{U}(\xi_r)].$$

On a, par hypothèse,

$$\overline{U}(\rho) = \overline{U}(\xi_r) = o;$$

donc

$$U(K) = o.$$

Nous avons ainsi démontré que les nouvelles fonctions sont aussi des intégrales et que les intégrales communes s'obtiennent par la même substitution.

Nous dirons que *les intégrales des équations réciproques admettent comme groupe de transformations une homothétie et une translation variable arbitrairement, quand on passe d'une surface intégrale commune à une autre.*

Nous obtenons ainsi le moyen de *déduire d'un système d'intégrales connues une infinité d'autres dépendant de $n+1$ fonctions arbitraires à $n-2$ variables.*

En répétant ces opérations, il paraît possible d'obtenir des intégrales dépendant d'une infinité de fonctions arbitraires; mais en réalité, comme nous allons le voir, il ne reste que $n+1$ fonctions distinctes.

Cela résulte de l'interprétation géométrique. En effet, répéter ces opérations revient à transformer plusieurs fois les caractéristiques par homothétie et translation; après p opérations de cette nature, on peut revenir aux caractéristiques primitives par une homothétie et une translation résultantes; ces résultantes ne seront pas les mêmes que pour les caractéristiques qui se trouvaient sur la même surface intégrale commune. On aura ainsi des nouvelles solutions, et les intégrales communes se transforment en des nouvelles.

Les surfaces génératrices subissent des transformations plus complètes; ainsi une surface développable se transforme en une surface réglée si les droites étaient des caractéristiques.

Nous avons donc établi que non seulement les intégrales forment un

groupe par rapport aux transformations (x), mais que ces transformations forment un groupe par rapport à elles-mêmes.

Pour trouver la fonction d'homothétie ρ et les fonctions de translation ξ_i résultantes, désignons par $X_1^1, \ldots, X_n^1, \ldots, X_1^p, \ldots, X_n^p$ les points successivement transformés; par $K_j^i(x_1, \ldots, x_n)$ les fonctions $k_j(X_1^i, \ldots, X_n^i)$ et par $\rho^i(K^i)$; $\xi_1^i(K^i), \ldots, \xi_n^i(K^i)$ les fonctions

$$\rho^i(k_2, \ldots, k_{n-1}); \quad \xi_1^i(k_2, \ldots, k_{n-1}), \quad \ldots, \quad \xi_n^i(k_2, \ldots, k_{n-1}).$$

On aura facilement

$$\begin{aligned} \rho(x_1, \ldots, x_n) &= \rho^p(K^p)\ldots\rho^1(K^1), \\ \xi_r(x_1, \ldots, x_n) &= \xi_r^p(K^p) + \rho^p(K^p)\,\xi_r^{p-1}(K^{p-1}) + \ldots \\ &\quad + \rho^p(K^p)\ldots\rho^2(K^2)\,\xi_r^1(K^1). \end{aligned}$$

Il est intéressant d'étudier ce qui arrive quand ces opérations se répètent à l'infini. Pour que le résultat final ait un sens, il faut que les expressions ρ; $\xi_1, \ldots, \xi_n$ admettent une limite et, pour cela, il suffit que les expressions

$$\rho^1\rho^2\ldots\rho^p; \quad \xi_1^1 + \xi_1^2 + \ldots + \xi_1^p, \quad \ldots, \quad \xi_n^1 + \xi_n^2 + \ldots + \xi_p^n$$

soient uniformément convergentes.

DEUXIÈME PARTIE.

Applications des équations aux intégrales réciproques à la Mécanique.

I. Nous avons vu les propriétés dont jouissent les intégrales des équations réciproques au point de vue de la Géométrie et à celui de la théorie des groupes. Ces propriétés ont des interprétations mécaniques très intéressantes; elles nous permettent de traiter une question générale de la Dynamique. C'est le cas du mouvement produit par des forces fonctions de vitesses.

Ce cas prend même un intérêt particulier par ses rapports avec les

questions que nous venons d'étudier, et des théorèmes curieux en résultent.

Parmi ces résultats je citerai que, une loi de forces étant donnée,

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = X_1(x_1, \ldots, x_n, t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{d^2 x_n}{dt^2} = X_n(x_1, \ldots, x_n, t), \end{cases}$$

on peut toujours reconnaître s'il existe un mouvement produit par des forces fonctions ne dépendant que des vitesses, lequel admet avec le premier un faisceau de trajectoires communes. Dans tous ces cas on peut trouver les trajectoires, c'est-à-dire les intégrales communes, sans même connaître les équations du dernier mouvement; c'est là un fait très curieux, puisque même quand on connaît les forces en fonction de vitesses il faut intégrer n équations différentielles et ensuite faire n quadratures. Nous serons dispensés de toutes ces opérations, et, en outre, nous aurons la facilité d'intégrer le système (1) qui contient évidemment une classe très générale des équations de la Dynamique.

II. Considérons les équations caractéristiques du mouvement

$$\frac{dx_1}{v_1} = \ldots = \frac{dx_n}{v_n} = dt = \frac{dv_1}{X_1} = \ldots = \frac{dv_n}{X_n}.$$

Si nous désignons par $V(z)$ l'opération

$$v_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + v_n \frac{\partial z}{\partial x_n} + \frac{\partial z}{\partial t},$$

on a

$$X_k = \frac{\partial v_k}{\partial x_1} v_1 + \ldots + \frac{\partial v_k}{\partial x_n} v_n + \frac{\partial v_k}{\partial t} = V(v_k),$$

et les équations du mouvement peuvent s'écrire

$$(2)\quad dt = \frac{dx_1}{v_1} = \ldots = \frac{dx_n}{v_n} = \frac{dv_1}{V(v_1)} = \ldots = \frac{dv_n}{V(v_n)}.$$

Si la loi du mouvement est fonction de vitesses, on aura

$$(3) \qquad V(v_1) = L_1(v_1, \ldots, v_n), \qquad \ldots, \qquad V(v_n) = L_n(v_1, \ldots, v_n),$$

ou en d'autres termes, quelles que soient les expressions des vitesses, elles forment un groupe par rapport à l'opération $V(z)$.

Nous avons vu dans la première Partie de cette étude que toutes les fois qu'un système de fonctions $v_1, \ldots, v_n$ constitue un groupe par rapport à l'opération $V(z)$, le système d'équations

$$\frac{dx_1}{v_1} = \ldots = \frac{dx_n}{v_n} = dt$$

admet un second système d'équations aux intégrales réciproques; c'est-à-dire qu'il existe un système de fonctions $u_1, \ldots, u_{n-1}$ uniques et déterminées, telles que le système

$$\frac{dx_1}{u_1} = \ldots = \frac{dx_n}{u_n} = dt$$

admet pour intégrales $v_1, \ldots, v_n$, et le système primitif admet pour intégrales $u_1, \ldots, u_{n-1}$.

Il s'ensuit de ces faits que *les expressions les plus générales des vitesses, résultant d'un mouvement produit par des forces fonctions des vitesses, sont des solutions des équations aux intégrales réciproques.*

En d'autres termes, les fonctions $v_1, \ldots, v_n$ seront des intégrales des équations

$$(4) \qquad \begin{cases} u_1 \dfrac{\partial v_k}{\partial x_1} + \ldots + u_n \dfrac{\partial v_k}{\partial x_n} + \dfrac{\partial v_k}{\partial t} = 0, \\[2ex] v_1 \dfrac{\partial u_k}{\partial x_1} + \ldots + v_n \dfrac{\partial u_k}{\partial x_n} + \dfrac{\partial u_k}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Les fonctions $u_1, \ldots, u_n$ seront aussi des vitesses qui correspondent à un mouvement défini par des équations de la forme

$$\frac{dx_1}{u_1} = \ldots = \frac{dx_n}{u_n} = dt = \frac{dv_1}{M_1} = \ldots = \frac{dv_n}{M_n},$$

$M_1, \ldots, M_n$ étant des fonctions des vitesses $u_1, \ldots, u_n$.

L'inverse du théorème énoncé plus haut est exact seulement pour les intégrales des équations réciproques de la forme simple (4).

Les intégrales des équations réciproques plus générales peuvent être considérées comme des forces fonctions des vitesses ou des trajectoires qui leur correspondent.

Les trajectoires seront données par les intégrales des équations

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1(x_1, \ldots, x_n, t), \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = v_n(x_1, \ldots, x_n, t).$$

Nous allons voir qu'elles se trouvent sans aucune quadrature.

Pour plus de précision, proposons-nous le problème suivant :

Étant donné un système de fonctions

$$v_1(x_1, \ldots, x_n, t), \ldots, v_n(x_1, \ldots, x_n, t),$$

vitesses d'un mouvement quelconque.

1° *Reconnaître si ces vitesses peuvent être considérées comme résultant d'un mouvement équivalent, où les forces sont des fonctions uniquement des vitesses;*

2° *Trouver l'expression générale des trajectoires du mouvement;*

3° *Trouver la loi de forces en fonction des vitesses du mouvement équivalent.*

La première et la deuxième partie se résolvent d'un seul coup.

Il faut vérifier que les expressions

$$(5) \qquad u_1 = \frac{\Delta(v, x_1)}{\Delta(v, t)}, \quad \ldots, \quad u_n = \frac{\Delta(v, x_n)}{\Delta(v, t)},$$

où l'on a mis

$$\Delta(v, x_i) = \frac{D(v_1, \ldots, v_n)}{D(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, t)},$$

sont des intégrales de l'équation linéaire

$$v_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + v_n \frac{\partial z}{\partial x_n} + \frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

Si ces équations sont vérifiées, alors les vitesses satisfont à la condition demandée par notre problème, et

$$u_1 = a_1, \quad \ldots, \quad u_n = a_n,$$

a_1, ..., a_n étant des constantes, définissent la congruence des trajectoires qui correspondent aux vitesses v_1, ..., v_n.

Pour résoudre la troisième partie, on considère les expressions

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} V(v_1) = X_1(x_1, \ldots, x_n, t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ V(v_n) = X_n(x_1, \ldots, x_n, t), \end{array} \right.$$

et l'on remplace x_1, ..., x_n en fonction de v_1, ..., v_n, t; la variable t disparaîtra, et l'on aura

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X_1(x_1, \ldots, x_n, t) = L_1(v_1, \ldots, v_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_n(x_1, \ldots, x_n, t) = L_n(v_1, \ldots, v_n). \end{array} \right.$$

III. Un problème qui contient le précédent et qui aussi ne peut pas se résoudre sans la connaissance des équations aux intégrales réciproques est le suivant :

Étant données les équations du mouvement

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n) :$$

1° *Reconnaître s'il existe un mouvement provenant des forces fonctions de vitesses seulement, qui admet avec le premier un faisceau de trajectoires communes, parcourues suivant la même loi;*

2° *Trouver les équations qui définissent ces trajectoires;*

3° *Trouver l'expression des forces en fonction des vitesses du mouvement équivalent.*

Il s'agit de reconnaître si un système d'équations

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i, \qquad \frac{dv_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$$

admet n intégrales intermédiaires de la forme

$$X_i(x_1, \ldots, x_n, t) = L_i\left(\frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right).$$

Nous allons voir ce fait curieux que, si le système d'équations données admet n intégrales intermédiaires de la forme indiquée, ces intégrales ne contiennent aucune fonction arbitraire; c'est-à-dire les fonctions $L_1, \ldots, L_n$ seront parfaitement déterminées pour des fonctions $X_1, \ldots, X_n$ données.

Remarquons que, s'il existe un système d'intégrales particulières

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1(x_1, \ldots, x_n, t), \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_n}{dt} = v_n(x_1, \ldots, x_n, t),$$

$v_1, \ldots, v_n$ étant des vitesses qui proviennent d'une loi de forces fonctions de vitesses, alors l'équation

$$v_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + v_n \frac{\partial z}{\partial x_n} + \frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

doit admettre comme intégrales les expressions

$$\frac{\Delta(v, x_k)}{\Delta(v, t)} = u_k.$$

Or, on a

$$\Delta(L, x_k) = \frac{D(L_1, \ldots, L_n)}{D(v_1, \ldots, v_n)} \Delta(v, x_k)$$

et

$$\Delta(L, x_k) = \Delta(X, x_k),$$

tout cela parce que le mouvement considéré dérive des forces $L_1, \ldots, L_n$ fonctions de vitesses.

Nous avons déjà les trajectoires avant de connaître même la loi des forces; le faisceau de trajectoires cherché sera donné, dans le cas où le mouvement demandé existe, sans aucune quadrature par les équations

$$(8) \qquad \frac{\Delta(X, x_k)}{\Delta(X, t)} = a_k \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Ces équations nous donnent les trajectoires et la loi du temps ; ces trajectoires forment une congruence.

Une conséquence intéressante est que, *si les expressions des forces* $X_1(x_1, \ldots, x_n, t), \ldots, X_n(x_1, \ldots, x_n, t)$ *sont algébriques, les équations des trajectoires le seront aussi.*

Les fonctions u_k étant calculées, nous devons former maintenant les fonctions

$$(9) \qquad \frac{\Delta(u, x_k)}{\Delta(u, t)} = \frac{\Delta^2(X, x_k)}{\Delta^2(X, t)} = v_k.$$

Si les fonctions $v_1, \ldots, v_n$ *sont les intégrales de l'équation* $U(z) = 0$, *alors il existe un faisceau de trajectoires satisfaisant aux conditions demandées.*

En d'autres termes, notre problème se réduit à la vérification de n identités

$$(10) \qquad \frac{\Delta(X, x_1)}{\Delta(X, t)} = \frac{\Delta^3(X, x_1)}{\Delta^3(X, t)}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\Delta(X, x_n)}{\Delta(X, t)} = \frac{\Delta^3(X, x_n)}{\Delta^3(X, t)}.$$

Ces égalités sont faciles à vérifier puisqu'elles sont rationnelles, par rapport aux fonctions données $X_1, \ldots, X_n$.

Nous avons vu comment on trouve les trajectoires du mouvement; pour avoir, maintenant, l'expression des forces fonctions de vitesses, nous prendrons dans les fonctions $X_1(x_1, \ldots, x_n, t), \ldots, X_n(x_1, \ldots, x_n, t)$, comme variables, $v_1, \ldots, v_n, t$. Après ce changement, la variable t disparaîtra et nous obtiendrons les fonctions $L_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, L_n(v_1, \ldots, v_n)$; ces fonctions seront ainsi complètement déterminées et nous aurons ce théorème :

Un système d'équations du second ordre (1) *qui définissent le mouvement d'un point libre ne peut admettre un système d'intégrales intermédiaires de la forme*

$$X_k(x_1, \ldots, x_n, t) = L_k\left(\frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right),$$

dépendant de fonctions ou de constantes arbitraires.

Au contraire, pour des fonctions $L_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, L_n(v_1, \ldots, v_n)$ données exprimant une loi de forces quelconque, il existe une infinité de fonctions $X_1(x_1, \ldots, x_n, t), \ldots, X_n(x_1, \ldots, x_n, t)$ exprimant une loi des forces qui donne des trajectoires communes avec les premières.

Si l'on regarde les égalités (10) comme des équations différentielles par rapport aux fonctions $X_1, \ldots, X_n$, on voit que les expressions des forces *qui donnent une congruence de trajectoires communes avec des trajectoires résultant des forces fonctions de vitesses sont des intégrales des équations du troisième ordre* (10).

Ce système d'équations admet un système d'intégrales intermédiaires

$$B_1(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\Delta^2(X, x_k)}{\Delta^2(X, t)}, \qquad \ldots, \qquad B_n(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\Delta^2(X, x_k)}{\Delta^2(X, t)},$$

$B_1, \ldots, B_n$ étant des fonctions arbitraires.

Ces équations du second ordre, nous savons les intégrer; ce sont les équations aux intégrales réciproques suivantes :

$$B_1(X_1, \ldots, X_n)\frac{\partial u_k}{\partial x_1} + \ldots + B_n(X_1, \ldots, X_n)\frac{\partial u_k}{\partial x_n} + \frac{\partial u_k}{\partial t} = 0,$$

$$u_1\frac{\partial X_k}{\partial x_1} + \ldots + u_n\frac{\partial X_k}{\partial x_n} + \frac{\partial X_k}{\partial t} = 0,$$

dont nous avons donné plus haut les méthodes d'intégration. Les fonctions $B_1, \ldots, B_n$ seront les vitesses du mouvement.

Note sur les axes principaux du temps de parcours;

PAR M. **HATON DE LA GOUPILLIÈRE**,

Membre de l'Institut.

§ I.

1. J'ai donné dans les *Annaes scientificos da Academia polytechnica do Porto* (1906) une étude sur le *centre de gravité du temps de parcours,* c'est-à-dire du système matériel formé par l'émanation qu'abandonne un mobile sur les divers éléments de sa trajectoire proportionnellement au temps employé à les franchir.

J'ai su depuis lors que cette notion de dissémination (si naturellement suggérée aujourd'hui par les automobiles) s'était déjà, à l'occasion de la théorie de Pallas, présentée à Gauss et ultérieurement à Bour, pour l'évaluation du potentiel de la masse d'une planète répartie par la pensée le long de son orbite en raison du temps de la marche.

Je n'ai d'ailleurs pas connaissance qu'aucun géomètre ait envisagé sur ce terrain la recherche du centre de gravité. L'autonomie de mon Mémoire subsiste donc intégralement, d'autant plus que j'y ai, en outre, abordé la substitution au temps, pour constituer la densité de la trajectoire, de divers autres éléments de la Dynamique générale, tels que l'énergie, la force centrifuge, etc.

Le centre de gravité et le potentiel se trouvant ainsi introduits dans cet ordre de considérations, il m'a semblé qu'il y avait lieu d'y rattacher encore la troisième des théories fondamentales de la Géométrie des masses, à savoir celle des moments et des axes principaux d'inertie; et tel est l'objet de cette Note. Je m'occuperai en premier lieu de la

recherche de ce système d'axes, et tout d'abord pour un mouvement plan.

2. Je le rapporte à deux axes rectangulaires Ox, Oy. Pour chercher en un point quelconque Ω, de coordonnées a, b, les axes principaux du temps réparti le long d'un arc M_0M de la trajectoire, je trace en ce point deux autres axes rectangulaires ΩX, ΩY respectivement inclinés sur les précédents sous un angle i. Il nous suffira de former relativement à ce système l'intégrale $\int_{t_0}^{t} XY\,dt$. La valeur de i qui sera capable de l'annuler fournira les axes cherchés.

Les formules de transformation des coordonnées nous donnent à cet égard

$$X = (x-a)\cos i + (y-b)\sin i,$$
$$Y = (y-b)\cos i - (x-a)\sin i.$$

On en déduit

$$XY = (x-a)(y-b)(\cos^2 i - \sin^2 i) - [(x-a)^2 - (y-b^2)]\sin i\cos i$$

et, par suite,

$$2XY = 2(x-a)(y-b)\cos 2i - [(x-a)^2 - (y-b)^2]\sin 2i,$$

d'où, en intégrant le long de l'arc M_0M, c'est-à-dire entre x_0, y_0, t_0 et x, y, t,

$$2\int XY\,dt = 2\cos 2i\int (x-a)(y-b)\,dt$$
$$- \sin 2i\int [(x-a)^2 - (y-b)^2]\,dt.$$

Il vient d'après cela, en égalant cette valeur à zéro,

$$(1) \qquad \operatorname{tang} 2i = \frac{2\int (x-a)(y-b)\,dt}{\int [(x-a)^2 - (y-b)^2]\,dt}.$$

Telle est la formule générale qui résoudra la question pour un point (a, b) du plan, après qu'on aura, au moyen des deux équa-

tions du mouvement, exprimé les trois variables x, y, t en fonction d'une seule d'entre elles et effectué les intégrations.

On sait d'ailleurs que la série des valeurs de i que fournit une relation de cette forme se réduit à quatre distinctes, correspondant aux diverses branches de l'angle droit $X\Omega Y$. Nous pourrons, par conséquent, nous en tenir à la plus petite d'entre elles en valeur absolue.

5. Considérons, comme exemple très simple, le mouvement parabolique des graves représenté par les équations

$$x = Vt, \qquad y = \frac{1}{2}gt^2.$$

Nous aurons, en comptant les arcs à partir du sommet O,

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{2\int_0^t (Vt - a)\left(\frac{gt^2}{2} - b\right) dt}{\int_0^t \left[(Vt - a)^2 - \left(\frac{gt^2}{2} - b\right)^2\right] dt},$$

ou, en effectuant les intégrations et supprimant un facteur t aux deux termes de la fraction,

$$\operatorname{tang} 2i = 5\,\frac{3Vgt^3 - 4agt^2 - 12bVt + 24ab}{-3g^2t^4 + 20(V^2 + bg)t^2 - 60aVt + 60(a^2 - b^2)},$$

ce qui peut s'écrire, en fonction des coordonnées de l'extrémité de l'arc OM,

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{5}{2}\,\frac{3xy - 6bx - 4ay + 12ab}{5x^2 - 3y^2 - 15ax + 10by + 15(a^2 - b^2)}.$$

Telle est la valeur cherchée.

Plaçons en particulier le point Ω en cette même extrémité M. Si nous faisons, à cet effet, $a = x$, $b = y$, il reste simplement

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{25xy}{10x^2 - 16y^2} = \frac{25}{10\cot\alpha - 16\operatorname{tang}\alpha},$$

en divisant les deux termes du rapport par xy et appelant α l'angle que fait la corde OM avec l'axe Ox.

Choisissons, en particulier, l'arc de parabole dont la corde est également inclinée sur l'axe et sur la tangente au sommet ; il vient définitivement, pour $\operatorname{tang}\alpha = \cot\alpha = 1$,

$$\operatorname{tang} 2i = -\frac{25}{6}, \qquad i = -(38^\circ 15' 8'') = -0{,}425\,(90^\circ).$$

Si nous plaçons en second lieu le point Ω au centre de gravité du temps de parcours (¹) en faisant $a = \frac{x}{2}$, $b = \frac{y}{3}$, de manière à obtenir les *axes principaux centraux du temps*, nous aurons

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{30}{15\cot\alpha - 16\operatorname{tang}\alpha},$$

et pour la corde de 45°

$$\operatorname{tang} 2i = -30, \qquad i = -(44^\circ 2' 44'') = -0{,}489\,(90^\circ).$$

4. Envisageons comme seconde application le mouvement elliptique que fournit la projection sous l'inclinaison α d'un mouvement circulaire uniforme. Si nous prenons sa vitesse angulaire pour unité, nous aurons comme équations du mouvement elliptique

$$x = \cos t, \qquad y = \cos\alpha \sin t.$$

La formule (1) devient d'après cela, en comptant les arcs à partir du sommet du grand axe,

$$\begin{aligned}\operatorname{tang} 2i &= \frac{2\displaystyle\int_0^t (\cos t - a)(\cos\alpha \sin t - b)\,dt}{\displaystyle\int_0^t [(\cos t - a)^2 - (\cos\alpha \sin t - b)^2]\,dt} \\ &= \frac{2(\cos\alpha \sin^2 t + 2a\cos\alpha\cos t - 2b\sin t + 2abt - 2a\cos\alpha)}{(1+\cos^2\alpha)\sin t\cos t + 4b\cos\alpha\cos t - 2a\sin t + (2a^2 - 2b^2 + \sin^2\alpha)t - 2b\cos\alpha} \\ &= \frac{2(y^2 + ax\cos^2\alpha - by + ab\cos\alpha \arccos x - a\cos^2\alpha)}{(1+\cos^2\alpha)xy + 4bx\cos^2\alpha - 2ay + (2a^2 - 2b^2 + \sin^2\alpha)\cos\alpha \arccos x - 2b\cos^2\alpha}.\end{aligned}$$

(¹) *Annaes*, 1906, p. 202.

Plaçons par exemple au centre le point Ω, nous aurons plus simplement

$$\tan g 2i = \frac{2y^2}{(1+\cos^2\alpha)xy + \sin^2\alpha\cos\alpha\arc\cos x}.$$

Attachons-nous enfin au quart d'ellipse, en faisant $x = 0$, $y = \cos\alpha$,

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{4}{\pi}\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha},$$

et pour une inclinaison de 45° sur le plan de projection

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}, \qquad i = 30^\circ 28' 38'' = 0,339\,(90^\circ).$$

5. Si le problème, au lieu d'embrasser la totalité du plan, n'est posé que pour un point spécial, on pourra toujours adopter ce dernier comme origine. En supposant dès lors $a = b = 0$ dans l'équation générale (1), on la réduit à la forme plus simple

$$(2) \qquad \operatorname{tang} 2i = \frac{2\int xy\,dt}{\int (x^2 - y^2)\,dt}.$$

On peut également, en passant aux coordonnées polaires

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

l'écrire de la manière suivante :

$$(3) \qquad \operatorname{tang} 2i = \frac{\int r^2 \sin 2\theta\,dt}{\int r^2 \cos 2\theta\,dt}.$$

6. La question précédente (n° 4) constitue un cas particulier de la force centrale, laquelle est ici proportionnelle à la distance. Il est aisé d'aborder la même recherche pour une courbe quelconque parcourue suivant la loi des aires; la loi d'attraction capable d'un tel mouvement étant alors fournie par la formule de Binet.

L'élément du temps se déduira du théorème des aires

$$\frac{1}{2} r^2 \, d\theta = C \, dt.$$

La relation (3) devient par là

$$(4) \qquad \operatorname{tang} 2i = \frac{\int r^4 \sin 2\theta \, d\theta}{\int r^4 \cos 2\theta \, d\theta},$$

et l'on n'aura qu'à y remplacer dans chaque cas r en fonction de θ d'après l'équation de la trajectoire.

7. Considérons comme exemple la spirale logarithmique, pour laquelle la force centrale s'exerce en raison inverse du cube de la distance. Je prendrai son équation sous la forme

$$r = e^{A\theta}, \qquad A = \cot \alpha,$$

en appelant α l'angle constant de la courbe avec ses divers rayons vecteurs.

La formule (4) nous donne pour l'arc compté à partir du pôle

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{\int_{-\infty}^{\theta} e^{4A\theta} \sin 2\theta \, d\theta}{\int_{-\infty}^{\theta} e^{4A\theta} \cos 2\theta \, d\theta}.$$

Ces deux intégrales ont pour valeurs

$$\frac{2A \sin 2\theta - \cos 2\theta}{8A^2 + 2} e^{4A\theta}, \qquad \frac{2A \cos 2\theta + \sin 2\theta}{8A^2 + 2} e^{4A\theta}.$$

L'exponentielle disparaît donc et il reste

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{2A \sin 2\theta - \cos 2\theta}{2A \cos 2\theta + \sin 2\theta} = \frac{\operatorname{tang} 2\theta - \frac{1}{2} \operatorname{tang} \alpha}{1 + \frac{1}{2} \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} 2\theta}.$$

Déterminons un angle auxiliaire β par la condition

$$\tan\!g\,\beta = \frac{1}{2}\tan\!g\,\alpha,$$

nous pourrons écrire

$$\tan\!g\,2i = \tan\!g(2\theta - \beta),$$

$$i = \theta - \frac{\beta}{2} = \theta - \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{1}{2}\tan\!g\,\alpha\right).$$

On voit par là que l'axe principal fait avec le rayon extrême l'angle constant, facile à construire, $\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{1}{2}\tan\!g\,\alpha\right)$, en tournant de conserve avec ce dernier si on lui fait décrire la courbe.

Il vient en particulier pour la spirale de 45°, comme valeur de cet angle,

$$(5) \qquad \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{1}{2} = 13^\circ 16' 58'' = 0{,}146(90^\circ).$$

8. Soit comme seconde application l'équation [1]

$$r = \cos^n \theta.$$

---

[1] L'attraction pour cette famille de courbes est proportionnelle à la fonction de la distance

$$\frac{1-n}{r^3} + \frac{n}{r^{\frac{3n+2}{n}}}.$$

Le premier terme disparaît dans le cas du cercle ($n = 1$), et la force s'exerce alors simplement en raison inverse de la cinquième puissance de la distance.

Pour les autres valeurs, on sait, d'après un théorème de Newton, dont j'ai donné une démonstration rattachée à la théorie des mouvements relatifs (Mallet-Bachelier, 1857, page 3 de ma seconde thèse), que l'influence de l'addition d'un terme inverse au cube du rayon vecteur à une fonction quelconque $\left(\text{qui est ici } nr^{-\frac{3n+2}{n}}\right)$ n'a d'autre effet que de déterminer autour du pôle une rotation de la trajectoire qu'on obtiendrait sous l'influence isolée de la force exprimée par le second terme seul, avec une vitesse angulaire proportionnelle à celle de ce dernier mouvement.

Elle nous donne

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{2\int_0^\theta \cos^{4n+1}\theta \sin\theta\, d\theta}{\int_0^\theta \cos^{4n}\theta(2\cos^2\theta - 1)\, d\theta} = \frac{\frac{1}{2n+1}(1-\cos^{4n+2}\theta)}{2\int_0^\theta \cos^{4n+2}\theta\, d\theta - \int_0^\theta \cos^{4n}\theta\, d\theta}.$$

Mais la première de ces intégrales peut se ramener à la seconde à l'aide de l'intégration par parties, ce qui permet d'écrire plus simplement

$$(6) \qquad \operatorname{tang} 2i = \frac{1-\cos^{4n+2}\theta}{\cos^{4n+1}\theta \sin\theta + 2n\int_0 \cos^{4n}\theta\, d\theta}.$$

Toutes les fois que $4n$ sera un nombre entier positif ou négatif, le même mode de réductions successives permettra d'effectuer le résultat au moyen de deux suites terminées bien connues, selon le signe de cet exposant [1].

9. Envisageons de même la famille de courbes qui dérive de la précédente en réduisant tous ses azimuts à moitié sans changer ses rayons vecteurs [2]

$$r = \cos^n 2\theta.$$

---

(1) On réussirait de même les intégrations par les procédés classiques pour les équations de la forme

$$r = \sum c \sin^m\theta \cos^n\theta,$$

avec des exposants entiers de signes quelconques, ainsi que pour les courbes

$$r = \sum c\theta^n e^{p\theta} \cos q\theta,$$

avec des valeurs de n entières et positives; notamment pour la famille des spirales algébriques

$$r = \theta^n.$$

(2) HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *Note sur la transformation la plus générale des engrenages de roulement* (*Annales des Mines*, 6e série, t. V, p. 333).

Nous aurons dans ce cas

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{\displaystyle\int_0^{\theta} \cos^{4n} 2\theta \sin 2\theta \, d(2\theta)}{\displaystyle\int_0^{\theta} \cos^{4n+1} 2\theta \, d(2\theta)} = \frac{1 - \cos^{4n+1} 2\theta}{(4n+1)\displaystyle\int_0^{\theta} \cos^{4n+1} 2\theta \, d(2\theta)},$$

et cette intégrale s'obtient dans les mêmes conditions que pour la recherche précédente.

Si l'on prend, par exemple, $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire la lemniscate de Bernoulli, il vient

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{1 - \cos^3 2\theta}{\sin 2\theta (\cos^2 2\theta + 2)}.$$

Pour la demi-boucle de cette courbe, on obtient

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \qquad \operatorname{tang} 2i = \frac{1}{2},$$

d'où la valeur de i déjà rencontrée (5).

§ II.

10. Ainsi que je l'ai indiqué en commençant, on peut également matérialiser la trajectoire à l'aide de n'importe quel élément de la Dynamique générale autre que le temps. Il suffit, pour en trouver les axes principaux, de substituer à la différentielle dt dans les formules générales (1), (2), (3) l'élément en question quel qu'il soit. Je me bornerai d'ailleurs à un seul pour ne pas trop étendre cette Note, à savoir l'énergie recueillie ou perdue le long de la route.

Son accroissement infiniment petit est $v\,dv$, si l'on adopte comme unité de masse celle du mobile. La relation (2) se trouve donc remplacée par la suivante :

$$(7) \qquad \operatorname{tang} 2i = \frac{2\displaystyle\int xy\,v\,dv}{\displaystyle\int (x^2 - y^2)\,v\,dv}.$$

On déduira dans chaque cas de l'équation des forces vives la valeur de $v\,dv$ en fonction des coordonnées, on exprimera l'une d'elles en fonction de l'autre à l'aide des équations du mouvement ou de celle de la trajectoire, et l'on n'aura plus qu'à effectuer les intégrations.

11. Supposons comme application qu'une ligne donnée soit parcourue sous l'influence de la gravité. Le travail élémentaire $v\,dv$ aura pour valeur $g\,dy$ (en employant des ordonnées plongeantes), et la formule (7) nous donnera

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{2\int_{y_0}^{y} xy\,dy}{\int_{y_0}^{y} (x^2 - y^2)\,dy},$$

en remplaçant x en fonction de y d'après l'équation de la trajectoire.

Je prendrai comme exemple le pendule simple, c'est-à-dire l'équation du cercle

$$x = \sqrt{1 - y^2},$$

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{\int_{y_0}^{y} \sqrt{1 - y^2}\, 2y\,dy}{\int_{y_0}^{y} (1 - 2y^2)\,dy} = \frac{-(1 - y^2)^{\frac{3}{2}} + (1 - y_0^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{3}{2}y - y^3\right) - \left(\frac{3}{2}y_0 - y_0^3\right)}.$$

Si l'on fait partir l'oscillation du niveau du centre ($y_0 = 0$), en l'étendant jusqu'au point le plus bas ($y = 1$), on obtient la valeur

$$\operatorname{tang} 2i = 2, \qquad i = 31°43'3'' = 0,352\,(90°).$$

12. Supposons en second lieu qu'une courbe arbitraire soit parcourue suivant la loi des aires, sous l'empire d'une force centrale que nous désignerons par F pour l'unité de masse. Le travail élémentaire est $-\mathrm{F}\,dr$, et l'équation (3) devient

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{\int \mathrm{F} r^2 \sin 2\theta\,dr}{\int \mathrm{F} r^2 \cos 2\theta\,dr}, \tag{8}$$

ou d'après la formule de Binet

(9) $$\operatorname{tang} 2i = \frac{\displaystyle\int \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right] \sin 2\theta \, dr}{\displaystyle\int \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right] \cos 2\theta \, dr}.$$

On n'aura plus qu'à remplacer dans chaque cas θ en fonction de r d'après l'équation de la trajectoire et à effectuer les intégrations.

15. Reprenons dans ces nouvelles conditions l'exemple de la spirale logarithmique (n° **7**)

$$r = e^{A\theta}, \qquad dr = A\, e^{A\theta}\, d\theta, \qquad \frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} = (1 + A^2)\, e^{-A\theta}.$$

L'exponentielle disparaît du produit de ces deux quantités, et la formule (9) se réduit à

(10) $$\operatorname{tang} 2i = \frac{\displaystyle\int \sin 2\theta \, d\theta}{\displaystyle\int \cos 2\theta \, d\theta}.$$

Quel que soit l'arc envisagé, l'on peut toujours faire passer par une de ses extrémités l'axe polaire ([1]), ce qui revient à intégrer à partir de zéro. Nous obtenons donc

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \operatorname{tang} \theta, \qquad i = \frac{\theta}{2}.$$

L'axe principal est, par conséquent, toujours la bissectrice des rayons extrêmes.

([1]) Il faut toutefois faire exception pour le cas où l'on s'attacherait à l'arc fini qui s'étend jusqu'au pôle, en intégrant à partir de $-\infty$. Le résultat deviendrait alors indéterminé; et c'est tout naturel, car le mobile recueille alors une quantité infinie d'énergie, en tournoyant dans tous les sens d'une manière qui échappe à toute détermination.

14. Considérons comme seconde application la spirale sinusoïde

$$r^n = \cos n\theta,$$

d'ordre quelconque n, pour laquelle l'attraction s'exerce en raison inverse de la puissance $2n+3$ de la distance. On trouve à l'aide de calculs dont je supprime le détail

$$\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} = (n+1)\cos^{-\frac{2n+1}{n}} n\theta,$$

$$dr = -\cos^{\frac{1}{n}-1} n\theta \sin n\theta \, d\theta.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression (9), nous pouvons supprimer aux deux termes de la fraction le facteur $-(n+1)$, et il reste simplement

$$\text{(11)} \qquad \operatorname{tang} 2i = \frac{\int \cos^{-3} n\theta \sin n\theta \sin 2\theta \, d\theta}{\int \cos^{-3} n\theta \sin n\theta \cos 2\theta \, d\theta}.$$

Nous devons toutefois excepter formellement à cet égard l'hypothèse $n = -1$ qui annulerait ce facteur commun. Mais ce cas est sans intérêt, car il correspond à la ligne droite avec une force nulle.

On remarquera que l'expression (11) est indépendante du signe de n. Les diverses solutions particulières du problème conviennent donc à des couples de spirales sinusoïdes transformées l'une de l'autre par rayons vecteurs réciproques.

15. Énumérons quelques cas spéciaux. On a pour le cercle passant au pôle ($n = 1$) (¹), avec attraction en raison inverse de la cinquième puissance de la distance,

$$\text{(12)} \qquad \operatorname{tang} 2i = \frac{\int_0^\theta \cos^{-3}\theta \sin 2\theta \sin\theta \, d\theta}{\int_0^\theta \cos^{-2}\theta \cos 2\theta \, d\theta} = \frac{4\theta\cos^2\theta - 2\sin 2\theta}{1 + 4\cos^2\theta \operatorname{Log}\cos\theta}.$$

(¹) Mais non la solution réciproque $n = -1$, qui vient d'être expressément exclue de cette analyse.

Pour l'hyperbole équilatère rapportée à son centre ($n = -2$) ([1]), avec attraction en raison directe de la distance,

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{\int_0^\theta \cos^{-3} 2\theta \sin^2 2\theta \, d\theta}{\int_0^\theta \cos^{-2} 2\theta \sin 2\theta \, d\theta} = \frac{\sin 2\theta - \cos^2 2\theta \operatorname{Log} \operatorname{tang}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}{4 \sin^2 \theta \cos 2\theta}.$$

Pour la parabole $\left(n = -\frac{1}{2}\right)$ ([2]), avec attraction vers le foyer en raison inverse du carré de la distance, ce qui constitue le mouvement cométaire,

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{\int_0^\theta \cos^{-3}\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} \sin 2\theta \, d\theta}{\int_0^\theta \cos^{-3}\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} \cos 2\theta \, d\theta} = \frac{8\theta - 4\sin\theta - 8 \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{3 - 4\cos\theta + \cos^{-2}\frac{\theta}{2} + 16 \operatorname{Log} \cos\frac{\theta}{2}}.$$

16. Envisageons de même le mouvement planétaire, et déterminons pour le foyer les axes principaux de l'énergie recueillie le long d'un arc d'ellipse représenté par l'équation

$$r = \frac{1}{1 - e\cos\theta}.$$

D'après la loi de gravitation, le produit Fr^2 est constant, sort des intégrales de l'expression (8) et disparaît de leur rapport. Il reste seulement

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{\int \sin 2\theta \, dr}{\int \cos 2\theta \, dr} = \frac{2\int \cos\theta \sqrt{1 - \cos^2\theta} \, dr}{\int (2\cos^2\theta - 1) \, dr},$$

([1]) Ou la lemniscate ($n = 2$), avec attraction en raison inverse de la septième puissance de la distance.

([2]) Ou la cardioïde $\left(n = \frac{1}{2}\right)$, avec une force en raison inverse de la quatrième puissance de la distance.

et comme on a, d'après l'équation de l'orbite,

$$\cos\theta = \frac{r-1}{r},$$

il vient

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{2\int (r-1)\sqrt{[(e+1)r-1][(e-1)r+1]}\,\frac{dr}{r^2}}{\int [(\sqrt{2}-e)r-\sqrt{2}][(\sqrt{2}+e)r-\sqrt{2}]\,\frac{dr}{r^2}}.$$

On voit que le dénominateur nous présente à intégrer une fonction rationnelle, et le numérateur un radical carré affectant un trinome du second degré. Nous rentrons donc dans les procédés classiques, mais je ne m'arrêterai pas à en développer les calculs.

17. Supposons enfin que la trajectoire soit représentée par une équation de la forme

$$r = [f(\theta)]^n,$$

avec un exposant n entièrement quelconque, entier, fractionnaire ou incommensurable, positif ou négatif, et une fonction arbitraire f, qui dépend de θ mais nullement de n. Il s'ensuit

$$dr = nf^{n-1}f'\,d\theta,$$

$$\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} = f^{-n} + n(n+1)f^{-n-2}f'^2 - nf^{-n-1}f'',$$

et, par conséquent,

$$(13)\qquad \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right] dr = n\frac{f'}{f}\left[1 - n\frac{f''}{f} + n(n+1)\frac{f'^2}{f^2}\right] d\theta.$$

Le facteur n sort des signes d'intégration et disparaît de la fraction (9) qui devient

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{\int \frac{f'}{f}\sin 2\theta\,d\theta - n\int \frac{f'f''}{f^2}\sin 2\theta\,d\theta + n(n+1)\int \frac{f'^3}{f^3}\sin 2\theta\,d\theta}{\int \frac{f'}{f}\cos 2\theta\,d\theta - n\int \frac{f'f''}{f^2}\cos 2\theta\,d\theta + n(n+1)\int \frac{f'^3}{f^3}\cos 2\theta\,d\theta}.$$

On voit que n a cessé de figurer en exposant, et que $\tang 2i$ n'en dépend plus que sous la forme

$$\frac{a + bn + cn^2}{A + Bn + Cn^2},$$

avec des coefficients uniquement fonctions de θ. Si donc on fait varier cet exposant *d'une manière continue*, en déformant ainsi progressivement l'arc de trajectoire compris entre deux azimuts déterminés, la rotation des axes principaux de l'énergie autour du pôle sera réglée par cette fraction rationnelle du second degré.

18. Il s'opère même encore une simplification lorsque l'on prend pour la fonction arbitraire $\cos\theta$ (¹). On a dans ce cas $f'' = -f$, et l'expression (13) peut s'écrire

$$\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right] dr = n(n+1)\frac{f'}{f}\left(1 + n\frac{f'^2}{f^2}\right) d\theta.$$

Le facteur $n(n+1)$ disparaît (²) de la fraction (9) qui se réduit à la forme

$$\tang 2i = \frac{a + bn}{A + Bn}.$$

Il nous est d'ailleurs facile d'achever alors le calcul.

Prenons, à cet effet, l'équation

$$(14) \qquad r = \cos^n\theta.$$

(¹) La forme $M\cos(\theta + m)$ présente la même propriété, mais n'apporte pas au fond plus de généralité, puisque la constante m n'a d'autre effet que de déplacer l'axe polaire et M de modifier l'unité de longueur.

(²) A la condition d'exclure les deux hypothèses $n = -1$ (ligne droite) et $n = 0$ (cercle décrit autour de l'origine), pour lesquelles il n'y a plus aucune variation d'énergie.

Il nous vient (¹)

$$\left[\frac{1}{r}+\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right]dr = -\,n(n+1)\sin\theta\left(\frac{1-n}{\cos\theta}+\frac{n}{\cos^3\theta}\right)d\theta,$$

$$(15)\quad\left\{\begin{aligned}\operatorname{tang}2i &= \frac{\displaystyle\int\left(\frac{1-n}{\cos\theta}+\frac{n}{\cos^3\theta}\right)\sin\theta\sin2\theta\,d\theta}{\displaystyle\int\left(\frac{1-n}{\cos\theta}+\frac{n}{\cos^3\theta}\right)\sin\theta\cos2\theta\,d\theta}\\ &= \frac{(2\theta-\sin2\theta)\cos^2\theta+n[(2+\cos^2\theta)\sin2\theta-6\theta\cos^2\theta]}{2(\cos2\theta\sin^2\theta+\cos^2\theta\operatorname{Log}\cos\theta)-n(1+2\cos2\theta\sin^2\theta+6\cos^2\theta\operatorname{Log}\cos\theta)}.\end{aligned}\right.$$

§ III.

19. Jusqu'ici nous ne nous sommes occupés que de la recherche des axes principaux. Celle des moments d'inertie est aussi facile, et l'on y pourrait trouver quelques exemples méritant d'être remarqués pour leur simplicité. Mais je ne m'y attarderai pas, et me bornerai, pour ne pas trop m'étendre, à formuler pour des conditions quelconques l'expression du moment d'inertie I d'un élément ε de Dynamique générale, quelle qu'en soit la nature. Il nous suffit, à cet égard, d'envisager un axe mené par l'origine sous des angles α, β, γ, puisque la théorie classique permet d'y rattacher toutes les droites parallèles.

Quant à la recherche des axes principaux dans l'espace à trois dimensions, elle se réduit à l'application de la méthode de l'équation en S à l'ellipsoïde que l'on obtient en remplaçant dans l'expression suivante $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ par X, Y, Z.

On sait que le moment d'inertie a pour valeur dans ces conditions

$$\begin{aligned}I = \cos^2\alpha\int(y^2+z^2)\varepsilon+\cos^2\beta\int(x^2+z^2)\varepsilon+\cos^2\gamma\int(x^2+y^2)\varepsilon\\ -2\cos\beta\cos\gamma\int yz\varepsilon-2\cos\alpha\cos\gamma\int xz\varepsilon-2\cos\alpha\cos\beta\int xy\varepsilon.\end{aligned}$$

(¹) On peut rapprocher l'une de l'autre les formules (6) et (15) qui représentent, pour la même famille de courbes (14), les axes principaux du temps ou de l'énergie.

On peut également vérifier, dans l'hypothèse $n=1$, la concordance de cette dernière (15) avec (12).

20. Continuons, pour fixer les idées, à prendre, comme élément fondamental ε, l'énergie recueillie en cours de route.

Imaginons spécialement que le mouvement soit effectué sur une courbe quelconque, sous l'action de la gravité, par l'unité de poids. On aura alors, en employant des coordonnées plongeantes,

$$\varepsilon = dz.$$

Déterminons enfin cette trajectoire par les équations paraboliques

$$x = \mathrm{M} z^m, \qquad y = \mathrm{N} z^n,$$

avec des exposants complètement arbitraires ([1]).

Pour diminuer les écritures, je me bornerai à compter les arcs à partir de l'origine, en supposant, à cet effet, les exposants positifs; mais ils reprendraient toute leur généralité si nous intégrions entre des limites quelconques z_0 et z.

Il vient dans ces conditions

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} = {} & \cos^2\alpha\int_0^z (\mathrm{N}^2 z^{2n} + z^2)\,dz + \cos^2\beta\int_0^z (\mathrm{M}^2 z^{2m} + z^2)\,dz \\
& + \cos^2\gamma\int_0^z (\mathrm{M}^2 z^{2m} + \mathrm{N}^2 z^{2n})\,dz - 2\mathrm{N}\cos\beta\cos\gamma\int_0^z z^{n+1}\,dz \\
& - 2\mathrm{M}\cos\alpha\cos\gamma\int_0^z z^{m+1}\,dz - 2\mathrm{MN}\cos\alpha\cos\beta\int_0^z z^{m+n}\,dz,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} = {} & \cos^2\alpha\left(\frac{\mathrm{N}^2 z^{2n+1}}{2n+1} + \frac{z^3}{3}\right) + \cos^2\beta\left(\frac{\mathrm{M}^2 z^{2m+1}}{2m+1} + \frac{z^3}{3}\right) \\
& + \cos^2\gamma\left(\frac{\mathrm{M}^2 z^{2m+1}}{2m+1} + \frac{\mathrm{N}^2 z^{2n+1}}{2n+1}\right) - \frac{2\mathrm{N}}{n+2} z^{n+2}\cos\beta\cos\gamma \\
& - \frac{2\mathrm{M}}{m+2} z^{m+2}\cos\alpha\cos\gamma - \frac{2\mathrm{MN}}{m+n+1} z^{m+n+1}\cos\alpha\cos\beta,
\end{aligned}$$

([1]) En excluant seulement les valeurs qui conduiraient à des logarithmes dans l'intégration.

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\mathrm{I}}{z} = \left(\frac{y^2}{2n+1} + \frac{z^2}{3}\right)\cos^2\alpha + \left(\frac{x^2}{2m+1} + \frac{z^2}{3}\right)\cos^2\beta + \left(\frac{x^2}{2m+1} + \frac{y^2}{2n+1}\right)\cos^2\gamma - \frac{2yz}{n+2}\cos\beta\cos\gamma - \frac{2xz}{m+2}\cos\alpha\cos\gamma - \frac{2xy}{m+n+1}\cos\alpha\cos\beta.$$

Telle est la valeur du moment d'inertie [1]. Nous en déduisons d'autre part cette équation en S pour servir de point de départ à la méthode classique de détermination des axes principaux de l'énergie :

$$\frac{(n+2)^2x^2}{\mathrm{S} - z\left[\frac{z^2}{3} + \frac{y^2}{2n+1} + \frac{(n+2)x^2}{(m+2)(m+n+1)}\right]} + \frac{(m+2)^2y^2}{\mathrm{S} - z\left[\frac{z^2}{3} + \frac{x^2}{2m+1} + \frac{(m+2)y^2}{(n+2)(m+n+1)}\right]} + \frac{(m+n+1)^2z^2}{\mathrm{S} - z\left[\frac{x^2}{2m+1} + \frac{y^2}{2n+1} + \frac{(m+n+1)z^2}{(m+2)(n+2)}\right]} + \frac{(m+2)(n+2)(m+n+1)}{z} = 0.$$

---

[1] Si l'on emploie par exemple la droite également inclinée sur les trois axes, en faisant

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

on aura simplement

$$\frac{3\mathrm{I}}{2z} = \frac{x^2}{2m+1} + \frac{y^2}{2n+1} + \frac{z^2}{3} - \frac{yz}{n+2} - \frac{xz}{m+2} - \frac{xy}{m+n+1}.$$

Sur l'équation de Volterra;

PAR M. TRAJAN LALESCO.

Licencié ès sciences.

INTRODUCTION.

Le présent travail a pour but de développer et compléter en certains points les belles recherches de M. Volterra (¹) sur l'équation fonctionnelle

$$\int_a^x f(x, s)\,\varphi(s)\,ds = \mathrm{F}(x) \tag{1}$$

et sur des équations analogues où l'une au moins des limites de l'intégrale est variable; $\varphi(s)$ désigne la fonction inconnue.

Ces recherches ont été le point de départ de la grande extension qu'a prise dans les derniers temps le calcul fonctionnel surtout avec l'introduction de l'équation fonctionnelle de Fredholm. Les beaux résultats de M. J. Fredholm ont été obtenus par un passage à la limite d'un problème d'Algèbre; or, cette idée fondamentale est exactement

(¹) V. VOLTERRA, *Sulla inversione degli integrali definiti* (*Atti della reale Accademia delle Scienze di Torino*, 12 janvier, 8 mars, 26 avril 1896, p. 311, 400, 557, 693).

Voir aussi *Rendiconti della reale Accademia dei Lincei* (1ᵉʳ semestre 1896, p. 177, 289).

celle qui a conduit M. V. Volterra à ses résultats et elle se trouve indiquée dans la première de ses quatre Notes publiées dans les *Atti della reale Accademia del Torino*. C'est un point qu'il était utile de signaler.

L'équation (1) a une importance incontestable, grâce à ses nombreuses applications dans la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles et partant dans la Physique mathématique; d'autre part, c'est un instrument analytique nouveau, irréductible à ceux dont l'Analyse était déjà douée. En effet, si le noyau $f(x, s)$ est un polynome en x de degré n, il est facile de montrer que la résolution de l'équation fonctionnelle (1) revient à l'intégration d'une équation différentielle linéaire d'ordre n avec des conditions initiales données; si l'on restait donc dans cette hypothèse, l'introduction de l'équation (1) ne serait justifiée que par certaines considérations de commodité. Mais on sait que M. V. Volterra a étudié le cas général où $f(x, s)$ est une fonction de deux variables réelles très générale; en prenant seulement le cas où la fonction $f(x, s)$ est une fonction analytique entière en x d'ordre plus petit que 1, nous montrerons que la résolution de l'équation (1) revient à l'intégration d'une équation différentielle linéaire d'ordre *infini*, avec des conditions initiales données, et cette circonstance nous rend compte en quelque sorte de « l'équivalence », dans le domaine actuel de l'Analyse, de cette équation fonctionnelle.

C'est en raison de cette importance et des profondes recherches que M. V. Volterra a publiées à ce sujet que nous désignerons, dans ce travail (à l'exemple de notre maître, M. E. Picard), l'équation fonctionnelle (1) sous le nom de *l'équation de Volterra*.

La méthode suivie par M. V. Volterra a obligé l'auteur, une fois les résultats trouvés, de se contenter simplement d'une vérification, ce qui est d'ailleurs aussi le cas de M. J. Fredholm, et pour la même raison; en posant *a priori* les solutions et les conditions de possibilité du problème dans les divers cas qu'il examine, M. V. Volterra démontre qu'elles satisfont bien à l'équation fonctionnelle considérée. Cette méthode de vérification ne permet pas de voir dans la nature intime de la question et conduit parfois à des calculs fastidieux, surtout dans le cas général où le noyau $f(x, s)$ s'annule pour $x = s = 0$.

En examinant de plus près la solution de M. V. Volterra, on reconnaît qu'elle dépend d'un mécanisme d'approximations successives; c'est ce mécanisme que M. E. Picard a mis en évidence en montrant avec quelle élégante simplicité on retrouve les résultats de M. V. Volterra, si l'on applique franchement les approximations successives. M. E. Picard [1] a ainsi traité le cas où le noyau étant fini dans un intervalle réel donné ne s'annule pas identiquement pour $s = x$ et celui où le noyau pouvant devenir infini est de la forme

$$f(x, s) = \frac{G(x, s)}{(x-s)^\lambda} \qquad (0 < \lambda < 1),$$

la fonction $G(x, s)$ n'étant pas identiquement nulle pour $x = 0$.

Dans ce travail nous appliquons directement la méthode des approximations successives au cas général où l'on a

$$f(x, s) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} s + \ldots + A_0 s^n + f_1(x, s),$$

$f_1(x, s)$ étant une fonction dont tous les termes sont de degré supérieur à n en x et s. Par notre méthode, la solution de ce problème dépend de l'intégration d'une équation différentielle linéaire d'ordre n et d'un mécanisme d'approximations successives. Si l'on fait l'hypothèse de $A_0 + A_1 + \ldots + A_n \neq 0$ qui est implicitement admise dans les recherches de M. V. Volterra, cette équation différentielle linéaire d'ordre n est du type de Fuchs par rapport à $x = 0$, et c'est l'équation déterminante de l'origine qui joue naturellement le rôle essentiel dans le développement de la solution et qui s'introduit ainsi d'une façon toute naturelle; nous démontrons facilement qu'elle se réduit d'ailleurs à l'équation

$$\frac{A_0}{\lambda - 1} + \ldots + \frac{A_n}{\lambda - n1} = 0,$$

qui a été donnée par M. Volterra.

Un théorème important, qui complète celui de M. V. Volterra, a été

---

[1] E. Picard, *Sur une équation fonctionnelle* (*Comptes rendus*, t. CXXXIX, 1904, p. 245).

obtenu par M. E. Holmgren (¹), par des calculs laborieux; nous l'établissons sans peine, en approfondissant davantage les conditions du problème et étudiant aussi le cas des racines nulles.

L'hypothèse de $A_0 + A_1 + \ldots + A_n = 0$ n'a pas été examinée par M. V. Volterra; dans ce cas le problème devient beaucoup plus difficile, car il dépend de l'intégration d'une équation différentielle linéaire qui peut admettre des intégrales irrégulières. En examinant d'une façon complète le cas de $n = 1$, nous trouvons un résultat qui conduit, dans une hypothèse particulière, à un énoncé dû également à M. E. Holmgren.

Pour le cas d'un noyau de la forme $\frac{G(x, s)}{(x - s)^\lambda}$ nous avons conservé le fameux artifice d'Abel employé par M. V. Volterra et nous avons examiné le cas général. Nous avons traité aussi les divers autres cas considérés par M. V. Volterra.

Ainsi l'équation

$$\int_{px}^{qx} f(x, s)\varphi(s)\,ds = F(x),$$

où p et q sont des constantes données telles que $\left|\frac{p}{q}\right| \neq 1$, est résolue en appliquant une méthode due à M. E. Picard (²), pour une équation fonctionnelle rencontrée dans la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre et avec laquelle elle a beaucoup d'analogie. Il est vrai qu'on peut réduire cette équation à l'équation (1), par un artifice souvent employé dans ce genre de questions, en prenant un noyau égal à $f(x, s)$ pour s compris entre px et qx $(p > q)$ et à 0 pour $0 < s < qx$. Mais l'équation (1) sur laquelle nous tombons n'entre dans aucune des catégories étudiées par M. Volterra et c'est pour cela qu'on doit l'étudier directement.

Les systèmes de n équations de Volterra simultanées à n fonctions inconnues et les équations de Volterra à n variables indépendantes peuvent être aussi traités avec une grande simplicité par la méthode

---

(¹) E. HOLMGREN, *Sur un théorème de M. V. Volterra sur l'inversion des intégrales définies* (extrait d'une lettre adressée à M. V. Volterra) (*Atti della reale Accademia del Torino*, t. XXXV, 1900, p. 570).

(²) E. PICARD, *Comptes rendus*, 13 mai 1907, p. 1009.

des approximations successives, et nous l'avons indiqué en examinant avec quelque détail le cas de $n = 2$. Nous avons pris comme application l'étude du cas $\frac{p}{q} = -1$ qui n'avait pas été étudié et qui nous a conduit à un résultat intéressant.

Nous nous sommes aussi occupé d'une généralisation de l'équation de Volterra, due à M. E. Burgatti [1]. Il s'agit de l'équation

$$\int_0^x \left[f_0(x, s)\varphi(s) + f_1(x, s)\frac{\partial\varphi(s)}{\partial s} + \ldots + f_n(x, s)\frac{\partial^n\varphi(s)}{\partial s^n}\right] ds = \mathrm{F}(x)$$

et nous avons montré qu'elle peut se réduire facilement à une équation de Volterra proprement dite, en donnant un résultat général à ce sujet.

Enfin, l'étude de l'équation de Volterra non linéaire est de beaucoup plus compliquée dans le cas général. Pour le type d'équations

$$\varphi(x) + \int_0^x \Phi[x, s, \varphi(s)]\, ds = \mathrm{F}(x),$$

qui contient linéairement la fonction inconnue en dehors du signe d'intégration, la méthode des approximations réussit complètement et nous donne un résultat général contenant celui obtenu par M. E. Picard pour l'équation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, qui en est un cas particulier.

Dans la seconde Partie, nous démontrerons qu'une équation de Volterra, à noyau fonction entière de x d'ordre plus petit que 1, équivaut à une équation différentielle linéaire d'ordre infini d'un type spécial, correspondant à un système déterminé d'équations différentielles linéaires d'ordre infini à une infinité de fonctions inconnues. Ce système a effectivement une infinité de solutions linéairement indépendantes et l'intégration d'une équation déterminée de Volterra revient à l'intégration d'un pareil système avec des conditions initiales qui déterminent complètement la solution; celle-ci sera donc, en général, une fonction multiforme à une infinité de branches. Nous avons vérifié ce résultat directement sur la solution donnée par M. Volterra,

---

(1) E. BURGATTI, *Rendiconti della reale Accademia dei Lincei*, 2e semestre 1903, p. 443, 596.

en passant dans le domaine des variables complexes. La solution de l'équation de Volterra est dans ce cas une fonction multiforme, ayant en général une infinité de branches et dont les points critiques, en général transcendants et de première espèce ([1]), sont les racines d'une certaine fonction entière. Cette fonction entière est justement le coefficient de la dérivée dont l'indice augmente indéfiniment dans l'équation différentielle linéaire d'ordre infini équivalente, ce qui nous semble être une circonstance remarquable mettant en évidence une analogie, au point de vue des singularités, entre les cas des ordres fini et infini.

Comme cas particulier du précédent, les équations différentielles linéaires d'ordre fini pourront être toujours transformées dans des équations de Volterra appartenant au type simple, de sorte que nous obtenons, par la méthode des approximations successives, un développement pour leurs intégrales, qui sera valable dans tout leur domaine d'existence. Cette méthode se rattache à celle dont l'origine est due à Cauchy et qui a été développée par MM. E. Picard, L. Fuchs, H. Poincaré, etc.

L'hypothèse que nous avons faite sur le noyau de l'équation de Volterra revient à une hypothèse analogue sur ce que nous avons appelé *la fonction génératrice de l'équation différentielle linéaire d'ordre infini*. Nous avons montré, en terminant, le rôle que semble devoir jouer cette hypothèse dans la théorie des équations différentielles linéaires d'ordre infini; lorsqu'elle n'est pas remplie, ces équations peuvent admettre des solutions analytiques qui ne satisfont pas aux équations dans tout leur domaine d'existence. Un exemple bien simple de pareilles intégrales que nous avons appelées *impropres* est donné par la fonction $\Gamma(x)$ qui vérifie l'équation

$$(1-x)y+\frac{dy}{dx}+\ldots+\frac{1}{n!}\frac{d^n y}{dx^n}+\ldots=0.$$

Cette équation est du type de Laplace; en lui appliquant la transformation de Laplace, on obtient directement ses solutions propres sous forme d'intégrales définies et aussi l'expression de la solution impropre $\Gamma(x)$ par l'intégrale définie bien connue.

([1]) Suivant une classification due à M. P. Boutroux.

PREMIÈRE PARTIE.

---

1. Considérons l'équation de Volterra

$$(1) \qquad \int_{\alpha}^{x} f(x,s)\,\varphi(s)\,ds = \mathrm{F}(x),$$

où $\varphi(s)$ désigne la fonction inconnue. Nous appellerons dans ce qui suit la fonction de deux variables $f(x,s)$ le *noyau* de l'équation (1), et nous supposerons pour fixer les idées les fonctions $f(x,s)$ et $\mathrm{F}(x)$ *analytiques* de leurs arguments; nous montrerons ensuite que les résultats obtenus restent vrais si les variables sont réelles, dans des conditions beaucoup plus larges qu'il sera facile de déterminer; α désigne une constante arbitraire.

Le type simple : $f(0,0) \neq 0$.

2. Supposons d'abord la fonction analytique $f(x,s)$ régulière dans le domaine du point $x=\alpha$ et $s=\alpha$, et proposons-nous de déterminer une solution de (1) qui soit aussi régulière dans le domaine du point $s=\alpha$. Pour que le problème soit possible, il est évident que nous devons avoir $\mathrm{F}(\alpha)=0$; la fonction $\mathrm{F}(x)$ doit donc être régulière et s'annuler au point $x=\alpha$. M. Volterra la met parfois sous la forme

$$\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(\alpha).$$

Soit

$$(2) \qquad f(x,s) = a_0(s) + a_1(s)\frac{s-x}{1} + \ldots + a_n(s)\frac{(s-x)^n}{n!} + \ldots$$

le développement du noyau, où l'on a mis en évidence les factorielles dans chaque terme, seulement pour faciliter l'écriture dans ce qui va suivre.

Cela posé, dérivons une fois (1); nous obtenons l'équation

$$(3) \qquad a_0(x)f(x) + \int_a^x f_1(x, s)\varphi(s)ds = F(x)$$

en posant

$$f_1(x, s) = \frac{\partial f(x, s)}{\partial x}.$$

Cette forme est très favorable pour l'application de la méthode des approximations successives; en effet, introduisons un paramètre λ devant le signe d'intégrale et cherchons à satisfaire à (2) par un développement de la forme

$$(4) \qquad \varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots,$$

les fonctions $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ... étant les diverses approximations qu'il s'agit de déterminer. Si l'on introduit le développement (3) en (2) et si l'on égale à zéro les coefficients des diverses puissances de λ, nous obtenons les équations suivantes :

$$(5) \qquad \begin{cases} a_0(x)\varphi_0(x) = F'(x), \\ a_0(x)\varphi_1(x) = -\int_a^x f_1(x, s)\varphi_0(s)ds, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_0(x)\varphi_n(x) = -\int_a^x f_1(x, s)\varphi_{n-1}(s)ds, \end{cases}$$

qui servent à déterminer d'une façon successive les approximations cherchées.

C'est ici que s'introduit tout naturellement la condition que

$$a_0(\alpha) = f(\alpha, \alpha) \neq 0.$$

Si cette condition est remplie, les diverses approximations $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ... seront données d'une façon unique par les relations (4), et elles seront parfaitement déterminées dans le cercle C ayant pour centre le point α et comme rayon la plus petite des distances du point α au zéro

de $a_0(x)$ et aux points singuliers de $F(x)$ et $f_1(x, s)$ les plus rapprochés du point α.

Tous les termes de la série (3) ont ainsi un sens parfaitement déterminé pour toute valeur de x située à l'intérieur du cercle C, et l'on peut démontrer avec facilité que, pour tout point x situé à l'intérieur du cercle C, la série (3) est une fonction entière de λ et qui, par conséquent, convergera absolument et uniformément dans tout intervalle fini de λ.

En effet, soit m le minimum de $a_0(x)$ à l'intérieur du cercle C; on a sûrement $m \neq 0$, d'après la définition même du cercle C. Soient, d'autre part, k et μ les modules maxima de $F'(x)$ et $f_1(x, s)$ dans le même domaine C; on a évidemment les inégalités

$$|\varphi_0(x)| < \frac{k}{m},$$

$$|\varphi_1(x)| < \frac{k}{m}\frac{\mu}{m}(x-\alpha),$$

$$|\varphi_2(x)| < \frac{k}{m}\frac{\mu^2}{m^2}\frac{(x-\alpha)^2}{1.2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$|\varphi_n(x)| < \frac{k}{m}\frac{\mu^n}{m^n}\frac{(x-\alpha)^n}{1.2\ldots n},$$

ce qui nous montre bien que la série (3) est une série entière en λ d'ordre au plus égal à 1, pour toute valeur de x située à l'intérieur du cercle C. Nous avons ainsi obtenu une fonction de x parfaitement déterminée à l'intérieur du cercle C et qui satisfait formellement l'équation (2); mais d'autre part le développement (3) y est absolument convergent en λ, d'où il résulte que la fonction $\varphi(x)$ définie par le développement (3) est bien une solution de l'équation (2).

On peut montrer que cette solution est unique *si x est compris à l'intérieur du cercle* C. En effet, donnons-nous d'abord un chemin d'intégration bien déterminé, par exemple un rayon du cercle C; s'il y avait une seconde solution régulière au point a différente de $\varphi(x)$, l'équation (2), sans second membre,

$$(6) \qquad a_0(x)\varphi(x) + \int_\alpha^x f_1(x, s)\varphi(s)\,ds = 0,$$

aurait une solution non identiquement nulle et il est facile de voir que cela est impossible. Pour cela, remarquons que des relations (5) et (6) on déduit

$$a_0(x)[\varphi(x) - \varphi_n(x)] = -\int_\alpha^x f_1(x, s)[\varphi(s) - \varphi_n(s)]\,ds.$$

On obtient donc des relations identiques aux formules (4), où l'on doit seulement remplacer $\varphi_n(x)$ par

$$\varphi(x) - \varphi_n(x).$$

En vertu du raisonnement précédent, il en résulte que l'expression

$$\lambda^n[\varphi(x) - \varphi_n(x)]$$

est le terme général d'une série, fonction entière de λ, et par conséquent on a

$$\lim_{n=\infty}[\varphi(x) - \varphi_n(x)] = 0,$$

d'où

$$\varphi(x) = \lim_{n=\infty}\varphi_n(x) = 0.$$

L'équation (2), sans second membre, n'admet donc aucune autre solution régulière en a que la solution identiquement nulle. Prenons maintenant un autre chemin situé tout à l'intérieur du cercle C et aboutissant au point x; il est évident que la solution donnée par la formule (3) n'a pas changé, car chacun de ses termes est une intégrale dont la valeur est restée inaltérée par la déformation du chemin d'intégration. La solution est bien unique [1] dans le cercle C.

On remonte ensuite de l'équation (2) à (1) par une intégration qui n'introduit pas de constante arbitraire, car $F(a) = 0$. Nous avons ainsi démontré le premier théorème de M. Volterra :

Si $f(\alpha, \alpha) \neq 0$, l'équation de Volterra (1) *admet une solution, et une seule, régulière au point α.*

---

(1) Pour le cas des variables réelles la première partie est suffisante, car le chemin d'intégration reste toujours le même; dans le domaine complexe cela n'est pas suffisant, et nous verrons la portée de cette remarque dans la seconde Partie de notre travail.

Elle sera sûrement régulière dans le cercle de centre α ayant pour rayon la plus petite des distances du point α aux zéros de $a_0(x)$ et aux singularités de $F(x)$ et $f(x, s)$.

5. On peut retrouver sans aucune difficulté la formule même donnée par M. V. Volterra; il suffit de remplacer les approximations tirées tout au long des formules (4). Nous obtenons ainsi, en ayant soin d'appliquer la formule de Dirichlet où il y a lieu et posant, pour abréger,

$$\frac{f_1(x, s)}{a_0(x)} = \pi_1(x, s),$$

$$\varphi_1(x) = - \int_\alpha^x \pi_1(x, \sigma)\varphi_0(\sigma)\,d\sigma,$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) &= (-1)^2 \int_\alpha^x \pi_1(x, s)\,ds \int_\alpha^s \pi_1(s, \sigma)\varphi_0(\sigma)\,d\sigma \\ &= (-1)^2 \int_\alpha^x \varphi_0(\sigma)\,d\sigma \int_\sigma^x \pi_1(x, s)\pi_1(s, \sigma)\,ds \\ &= (-1)^2 \int_\alpha^x \pi_2(x, \sigma)\varphi_0(\sigma)\,d\sigma\end{aligned}$$

et, en général,

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &= (-1)^n \int_\alpha^x \pi_1(x, s)\,ds \int_\alpha^s \pi_{n-1}(s, \sigma)\varphi_0(\sigma)\,d\sigma \\ &= (-1)^n \int_\alpha^x \varphi_0(\sigma)\,d\sigma \int_\sigma^x \pi_1(x, s)\pi_{n-1}(s, \sigma)\,ds \\ &= (-1)^n \int_\alpha^x \pi_n(x, \sigma)\varphi_0(\sigma)\,d\sigma,\end{aligned}$$

où l'on a d'une façon générale

$$\pi_n(x, y) = \int_y^x \pi_1(x, s)\pi_{n-1}(s, y)\,ds.$$

Donc, en posant

$$\pi(x, s) = -\pi_1(x, s) + \pi_2(x, s) + \ldots + (-1)^n \pi_n(x, s) + \ldots,$$

on voit que la solution de l'équation (1) est donnée par la formule

$$(7) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{a_0(x)}\left[F'(x) + \int_\alpha^x \frac{\pi(x, s)\,F'(s)\,ds}{a_0(s)}\right]$$

qui, aux notations près, est justement la formule de M. Volterra.

4. Un cas particulier présentant un intérêt à la fois pratique et historique est celui où le noyau est de la forme $f(x-s)$. Dans ce cas, $a_0(s)$ se réduit à une constante qu'on peut supposer être égale à l'unité. On aura donc, dans ce cas,

$$\pi_1(x-s)=f_1(x-s),$$

$$\pi_2(x-s)=\int_s^x f_1(x-\sigma)f(\sigma-s)\,d\sigma$$

et, en général,

$$\pi_n(x-s)=\int_s^x f_1(x-\sigma)\pi_{n-1}(\sigma-s)\,d\sigma.$$

Si l'on fait la transformation de coordonnées $\sigma-s=t$, on obtient

$$\pi_n(x-s)=\int_0^{x-s} f_1(x-s-t)\pi_{n-1}(t)\,dt;$$

on a donc

$$\pi_n(u)=\int_0^u f_1(u-t)\pi_{n-1}(t)\,dt$$

et, par conséquent,

$$\pi(u)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^u f_1(u-t)\pi_{n-1}(t)\,dt,$$

et l'on a, par conséquent, dans ce cas, la formule plus simple

$$(8)\qquad \varphi(x)=F'(x)+\int_0^x \pi(x-s)F'(s)\,ds.$$

Ce calcul s'applique évidemment si, plus généralement, on avait un noyau fonction de la combinaison $\lambda(x)-\lambda(s)$ [1].

Le cas de $f(o, o) = o$.

5. Jusqu'ici, l'hypothèse $a_0(x)\neq 0$, pour $x=\alpha$, a été essentielle. Il faut maintenant nous affranchir de cette hypothèse et examiner le

[1] *Voir* V. Volterra, *Annali di Matematica*, 1897, p. 154.

cas général. Le noyau étant analytique en x et s et régulier au point $x=s=\alpha$, développons-le suivant les puissances de $x-\alpha$ et $s-\alpha$; pour simplifier, nous supposerons dorénavant que le point α a été transporté à l'origine, de sorte que $\alpha = 0$.

Le développement de $f(x,s)$ aura nécessairement, dans le cas général, la forme suivante :

$$f(x,s) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} s + \ldots + A_0 s^n + \psi(x,s),$$

$\psi(x,s)$ contenant des termes dont le degré total en x et s est supérieur à n. Avant d'étudier ce cas général, nous allons d'abord considérer le cas particulier où la fonction $f(x,s)$ est un polynome en x de degré n. C'est une manière d'agir qui s'impose pour ceux qui sont un peu habitués au mécanisme des approximations successives; ce cas particulier nous sera d'ailleurs très utile et pour d'autres développements ultérieurs.

Nous pouvons, dans ce cas, écrire

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} f(x,s) = a_0(s) + a_1(s)\frac{s-x}{1} + \ldots \\ + a_k(s)\frac{(s-x)^k}{k!} + \ldots + a_n(s)\frac{(s-x)^n}{n!}, \end{aligned}\right.$$

les fonctions $a_k(s)$ étant régulières pour $s=0$.

En dérivant une fois l'équation (1) par rapport à x, nous obtenons

$$a_0(x)\varphi(x) - \int_0^x \left[a_1(s) + \ldots + a_n(s)\frac{(s-x)^{n-1}}{(n-1)!}\right]\varphi(s)\,ds = F'(x)$$

et, par n dérivations successives,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &[a_0(x)\varphi(x)]' - [a_1(x)\varphi(x)] \\ &\quad + \int_0^x \left[a_2(s) + \ldots + a_n(s)\frac{(s-x)^{n-2}}{(n-2)!}\right]\varphi(s)\,ds = F''(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &[a_0(x)\varphi(x)]^{(k)} - [a_1(x)\varphi(x)]^{(k-1)} + \ldots \\ &\quad + (-1)^k[a_k(x)\varphi(x)] \\ &\quad + \int_0^x \left[a_{k+1}(s) + \ldots + a_n(s)\frac{(s-x)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\right]\varphi(s)\,ds = F^{(k+1)}(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}\right.$$

et

$$(10')\quad \left\{ \begin{aligned} &[a_0(x)\varphi(x)]^{(n)} - [a_1(x)\varphi(x)]^{(n+1)} + \ldots \\ &\qquad + (-1)^n [a_n(x)\varphi(x)] = F^{(n+1)}(x). \end{aligned} \right.$$

Nous avons ainsi déduit de (1), par $n+1$ dérivations successives, une équation différentielle linéaire d'ordre n qui est l'équation adjointe de

$$(10'')\quad \left\{ \begin{aligned} &a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots \\ &\qquad + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F^{(n+1)}(x). \end{aligned} \right.$$

Réciproquement, supposons que $\varphi(x)$ soit une solution de l'équation (10′) et qu'elle satisfasse aux n relations (10) où l'on fait $x=0$; on pourra, par n intégrations successives, remonter de (10′) à (1) et, par conséquent, la fonction $\varphi(x)$ sera bien, dans ces conditions, une solution de l'équation fonctionnelle (1). Or les relations (10), où l'on fait $x=0$, sont n relations linéaires entre la valeur de $\varphi(x)$ et de ses $n-1$ premières dérivées, pour $x=0$. Si nous désignons par y_0, $y_1, \ldots, y_{n-1}$ ces valeurs, les relations (10) deviennent, pour $x=0$,

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} &a_0 y_0 = F'(0), \\ &a_0 y_1 + (a'_0 - a_1) y_0 = F''(0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_0 y_k + (k a'_0 - a_1) y_{k-1} + \ldots \\ &\qquad + (a_0^{k)} - a_1^{k-1)} + \ldots + a_k) y_0 = F^{k+1)}(0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_0 y_{n-1} + [(n-1)a'_0 - a_1] y_{n-2} + \ldots \\ &\qquad + (a_0^{n-1)} - a_1^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}) y_0 = F^{(n)}(0), \end{aligned} \right.$$

en posant

$$a_i^{k)} = a_i^{(k)}(0).$$

Supposons $a_0 = a_0(0) \neq 0$; dans ce cas, les relations (11) nous déterminent successivement $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ et d'une façon unique. La fonction $\varphi(x)$, solution de (1), doit donc satisfaire à l'équation dif-

férentielle d'ordre n (10′) et sa valeur ainsi que celles de ses $n-1$ dérivées sont parfaitement déterminées pour $x=0$; d'ailleurs, le coefficient de $\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}$ en (10′) est $a_0(x)$. Il suit de là que l'équation de Volterra a dans ce cas une seule solution, régulière à l'origine; nous retrouvons ainsi, d'une autre manière, le premier théorème de Volterra pour l'équation particulière que nous avons considérée.

Soit, maintenant, $a_0(0)=f(0,0)=0$ et considérons le cas où l'ensemble des termes de degré minimum de $f(x,s)$ en x et s est de degré n; ceci nous sera suffisant pour arriver au théorème général de M. Volterra.

Si nous nous reportons au développement (9), nous voyons que dans ce cas les fonctions $a_0(s)$, $a_1(s)$, ..., $a_{n-1}(s)$ devront admettre l'origine comme zéro au moins d'ordre n, $n-1$, ..., 1 respectivement. Nous aurons donc

$$a_i(s)=s^{n-i}(\alpha_i+\beta_i s+\ldots), \tag{12}$$

toutes les quantités α_0, α_1, ..., α_n ne pouvant pas être nulles à la fois. *Supposons avec M. Volterra que* $\alpha_0\neq 0$. Les premiers membres des relations (11) sont identiquement nuls, en supposant y_0, y_1, ..., y_{n-1} finis; il en résulte

$$F'(0)=F''(0)=\ldots=F^{(n)}(0)=0.$$

Par conséquent, pour que la solution de (1) soit finie à l'origine, ainsi que ses $n-1$ premières dérivées, il faut que

$$F(x)=x^{n+1}F_1(x).$$

Cela posé, toute solution de l'équation différentielle (10′) régulière à l'origine sera une solution de l'équation fonctionnelle et inversement. Or, l'équation (10′) est une équation du type de Fuchs pour l'origine, comme on le voit directement en tenant compte de (12) ou, encore plus facilement, en remarquant que son adjointe (10″) est visiblement de ce type. Pour trouver l'équation déterminante de l'origine, il suffit d'observer que celle de son adjointe est évidemment

$$\alpha_0\rho(\rho-1)\ldots(\rho-n+1)+\alpha_1\rho(\rho-1)\ldots(\rho-n+2)+\ldots+\alpha_n=0.$$

Or, on passe de l'équation déterminante d'une équation pour un point à celle de son adjointe par la substitution (¹)

$$r = -\rho - 1.$$

L'équation déterminante cherchée est donc

$$(13)\quad \begin{cases} \alpha_0(r+1)(r+2)\ldots(r+n) - \alpha_1(r+1)\ldots(r+n-1)+\ldots \\ \qquad\qquad + (-1)^n\alpha_n = 0. \end{cases}$$

Soient $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ses racines, supposées différentes entre elles et telles que leurs différences mutuelles ne soient pas des nombres entiers; dans ce cas, l'intégrale générale de (10') est de la forme

$$(14)\quad C_1 x^{r_1} P_1(x) + C_2 x^{r_2} P_2(x) + \ldots + C_n x^{r_n} P_n(x) + P(x),$$

$P(x)$ étant une solution particulière de l'équation (10') et $P_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ des fonctions holomorphes de x et non nulles pour $x = 0$.

Or, la condition essentielle que s'impose M. Volterra par la considération des variables réelles est que la solution de (1) soit *finie* pour $x = 0$. Cela explique pourquoi intervient dans ce problème la question du signe de la partie réelle des racines de l'équation (13) qui, nous le montrerons tout de suite, se réduit à l'équation qu'on trouve dans l'énoncé de M. Volterra.

Déterminons d'abord une solution particulière $P(x)$. La méthode de la variation des constantes nous donne immédiatement une solution de la forme

$$(15)\quad \begin{cases} x^{r_1} P_1(x)\displaystyle\int_0^x \frac{Q_1(x)\,dx}{x^{r_1+1}} + x^{r_2} P_2(x)\int_0^x \frac{Q_2(x)\,dx}{x^{r_2+1}} + \ldots \\ \qquad\qquad + x^{r_n} P_n(x)\displaystyle\int_0^x \frac{Q_n(x)\,dx}{x^{r_n+1}}, \end{cases}$$

où $Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_n(x)$ sont des fonctions de x, régulières à l'origine.

(¹) L. FUCHS, *Journal de Crelle*, t. 76, 1875, p. 180, et THOMÉ, même Tome, p. 284.

Si donc nous voulons qu'elle ait une *seule* solution finie à l'origine, il faudra nécessairement que toutes les racines $r_1, \ldots, r_n$ *aient leurs parties réelles négatives* pour qu'on ait nécessairement

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0.$$

Dans ce cas, puisque

$$R(r_i) < 0,$$

on aura

$$R(r_i) + 1 < 1,$$

en désignant par le symbole $R(r_i)$ la partie réelle de r_i; par conséquent, la solution particulière (15) sera finie à l'origine et ce sera, d'ailleurs, la seule jouissant de cette propriété.

C'est le résultat général de M. Volterra pour l'équation particulière que nous avons considérée. Pour retrouver l'équation algébrique de l'énoncé de M. Volterra changeons le signe de r en (13), ce qui nous donne

$$(13') \left\{ \begin{aligned} &\alpha_0(r-1)(r-2)\ldots(r-n) + \alpha_1(r-1)\ldots(r-n+1) + \ldots \\ &\quad + \alpha_p(r-1)(r-2)\ldots(r-n+p) + \ldots + \alpha_n = 0. \end{aligned} \right.$$

M. Volterra désigne, comme nous l'avons fait dans le n° 5, par

$$\sum_{i=0}^{n} A_i x^{n-i} s^i$$

l'ensemble des termes de degré n de $f(x, s)$; il est facile d'obtenir les relations entre A_i et α_i ($i = 1, \ldots, n$) en faisant $s = x$ dans l'expression (9) du noyau et dans celles de ses n premières dérivées successives. Nous obtenons

$$\alpha_0 = A_n + A_{n-1} + \ldots + A_1 + A_0,$$
$$(-1)\alpha_1 = A_{n-1} + 2A_{n-2} + \ldots + nA_0,$$
$$(-1)^{n-2}\frac{\alpha_{n-2}}{(n-2)!} = A_2 + \frac{n-1}{1}A_1 + \frac{(n-1)nA_0}{2},$$
$$(-1)^{n-1}\frac{\alpha_{n-1}}{(n-1)!} = A_1 + nA_0,$$
$$(-1)^n\frac{\alpha_n}{n!} = A_0.$$

Remplaçant ces valeurs en (13′) nous obtenons l'équation

$$
\begin{aligned}
&(A_n + A_{n-1} + \ldots + A_0)(r-1)(r-2)\ldots(r-n) \\
&\quad - (A_{n-1} + 2A_{n-2} + \ldots + nA_0)(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1) \\
&\quad + (-1)^p p!\left[A_{n-p} + \frac{p+1}{1}A_{n-p-1} + \ldots + \frac{(p+1)\ldots n}{(n-p)!}A_0\right] \\
&\qquad\qquad \times (r-1)\ldots(r-n+p) + \ldots + (-1)^n A_0 = 0
\end{aligned}
$$

qui, ordonnée par rapport aux A_i, s'écrit

$$
\begin{aligned}
&A_n(r-1)\ldots(r-n) + A_{n-1}(r-1)\ldots(r-n+1)(r-n-1) + \ldots \\
&\quad + A_{n-p}(r-1)\ldots(r-n+p)(r-n+p-2)\ldots(r-n-1) + \ldots \\
&\qquad\qquad + A_0(r-2)\ldots(r-n)(r-n-1) = 0
\end{aligned}
$$

ou, en divisant par le produit $(r-1)\ldots(r-n-1)$,

$$
(13'') \qquad \frac{A_0}{r-1} + \frac{A_1}{r-2} + \ldots + \frac{A_n}{r-n-1} = 0,
$$

qui est justement l'équation qui figure dans l'énoncé de M. Volterra.

Nous avons changé le signe de r en (13); l'équation (13″) doit donc avoir toutes ses racines à parties réelles positives; dans ce cas, l'équation (1) aura une seule solution.

Pour arriver à ce résultat nous avons dû supposer

$$
\alpha_0 = A_0 + A_1 + \ldots + A_n \neq 0,
$$

condition qui est fondamentale et implicitement supposée satisfaite dans la solution de M. Volterra. En outre, nous avons supposé que les racines $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sont telles que leurs différences ne soient ni nulles ni entières; or, il est facile de voir que cette condition n'est qu'accessoire et que le théorème reste vrai même si elle n'est pas satisfaite. En effet, les termes logarithmiques qui s'introduisent dans l'intégrale particulière conduisent à des expressions de la forme

$$
\int_0^x \frac{Q(x)\log^k x\,dx}{x^{r_i+1}}
$$

qui, pour être finies, conduisent aux mêmes conditions pour les racines r_i.

6. Nous sommes maintenant en état d'appliquer avec une grande facilité la méthode des approximations successives pour étudier le cas général. Soit

$$\int_0^x f(x,s)\varphi(s)\,ds = \mathrm{F}(x)$$

l'équation de Volterra où le noyau est égal à

$$f(x,s) - a_0(s) + a_1(s)\frac{s-x}{1} + \ldots + a_n(s)\frac{(s-x)^n}{n!} + \ldots,$$

le développement précédent étant convergent si $|s| < a$ et $|s-x| < \mathrm{R}$. Soit n le degré minimum de l'ensemble des termes homogènes en x et s de $f(x,s)$. Si nous dérivons l'équation de Volterra $n+1$ fois de suite, nous sommes conduits à l'équation

$$(16)\quad \begin{cases} \mathrm{D}[\varphi_0(x)] = [a_0(x)\varphi_0(x)]^{(n)} \\ \qquad - [a_1(x)\varphi_0(x)]^{(n-1)} + \ldots + (-1)^n[a_n(x)\varphi(x)] \\ \qquad + (-1)^{n+1}\int_0^x f_n(x,s)\varphi(s)\,ds = \mathrm{F}^{(n+1)}(x), \end{cases}$$

où $f_n(x,s)$ désigne la $n^{\text{ième}}$ dérivée de $f(x,s)$ par rapport à $s-x$. Introduisons un paramètre λ devant l'intégrale et appliquons la méthode des approximations successives; nous aurons d'abord à résoudre l'équation différentielle

$$(17)\quad \begin{cases} \mathrm{D}[\varphi_0(x)] = [a_0(x)\varphi_0(x)]^{(n)} - [a_1(x)\varphi_0(x)]^{(n-1)} + \ldots \\ \qquad + (-1)^n[a_n(x)\varphi_0(x)] = \mathrm{F}^{(n+1)}(x) \end{cases}$$

étudiée dans le numéro précédent, et nous avons vu que, si l'équation (13″) correspondante a toutes ses racines à parties réelles positives, l'équation (17) aura une seule solution finie à l'origine de la forme

$$\varphi_0(x) = x^{r_1}\mathrm{P}_1(x)\int_0^x \frac{\mathrm{Q}_1(x)\,\mathrm{F}^{(n+1)}(x)\,dx}{x^{r_1+1}} + \ldots + x^{r_n}\mathrm{P}_n(x)\int_0^x \frac{\mathrm{Q}_n(x)\,\mathrm{F}^{(n+1)}(x)\,dx}{x^{r_n+1}},$$

où les fonctions $Q_1(x), \ldots, Q_n(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ sont des fonctions holomorphes à l'origine ne dépendant que de l'équation différentielle (17) sans second membre.

Les autres approximations successives sont données par des équations différentielles linéaires absolument analogues :

$$(17') \quad \begin{cases} D[\varphi_1(x)] = (-1)^n \int_0^x f_n(x,s)\varphi_0(s)\,ds, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ D[\varphi_n(x)] = (-1)^n \int_0^x f_n(x,s)\varphi_{n-1}(s)\,ds, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Rien n'est plus aisé maintenant que de démontrer la convergence uniforme et absolue de la série des approximations

$$(18) \qquad \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots,$$

quel que soit λ, dans un cercle décrit de l'origine comme centre et dont le rayon sera tout de suite déterminé.

En effet, soit q le module maximum des fonctions $Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_n(x)$ dans le cercle ayant pour rayon la distance de l'origine au premier zéro de $a_0(x)$ le plus rapproché de l'origine ; soient de même p celui des fonctions $P_1(x), \ldots, P_n(x)$, et enfin M et N ceux de $F^{(n+1)}(x)$ et $f_n(x,s)$ dans leurs cercles de convergence. Le rayon du cercle où la série des approximations converge sera le plus petit de ces trois rayons.

Nous aurons d'abord

$$|\varphi_0(x)| < \frac{\mathrm{M}npq}{\sigma}\frac{a\mathrm{M}}{\sigma},$$

σ désignant la plus petite des quantités $|r_i|$ $(i = 1, \ldots, n)$, et de même successivement

$$|\varphi_1(x)| < a^2\mathrm{MN}\frac{x}{\sigma(\sigma+1)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$|\varphi_n(x)| < a\mathrm{M}\frac{(a\mathrm{N}x)^n}{\sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+n)n!},$$

ce qui démontre bien la convergence absolue et uniforme du développement (18), quel que soit λ, dans le cercle précédemment défini.

Il est inutile de vérifier la solution ainsi obtenue; en effet, la série des approximations étant absolument convergente, nous sommes sûrs qu'elle est solution de l'équation (17), puisqu'elle la satisfait formellement.

On passe ensuite de (17) à l'équation de Volterra par $n+1$ intégrations successives qui n'introduisent pas des constantes arbitraires, car

$$F(x) = x^{n+1} F_1(x).$$

La solution est *unique;* d'abord, pour un chemin déterminé d'intégration, car l'équation (17) sans second membre ne peut avoir aucune solution autre que la solution identiquement nulle, en vertu d'un raisonnement identique à celui qui a été fait au n° **1**; comme les intégrales qui donnent les diverses approximations sont ensuite uniformes dans le cercle précédemment défini, on déduit que la solution est unique, quel que soit le chemin d'intégration situé à l'intérieur du cercle. Le problème est ainsi complètement résolu.

7. Qu'est-ce qu'il arrive si toutes les racines r_i n'ont pas leurs parties réelles négatives?

C'est une question qui a été traitée, dans le cas d'une seule racine négative, par M. V. Volterra (¹) et, dans le cas général, par M. E. Holmgren (²); ces deux savants se sont occupés des fonctions finies à l'origine, les seules qui intéressent dans le champ des variables réelles. La méthode précédente nous permet de retrouver et compléter le résultat général obtenu par M. E. Holmgren.

Supposons que l'équation (13″) a k racines à parties réelles négatives ($k < n$); l'équation (13) ayant alors k racines à parties réelles positives, soient $r_1, r_2, \ldots, r_k$ ces racines, et considérons la solution

---

(¹) V. Volterra, *loc. cit.*, 4ᵉ note, p. 707.

(²) E. Holmgren, *loc. cit.*, p. 570.

particulière

$$(19)\quad \begin{cases} P(x) = \quad x^{r_1}\; P_1\;\;(x)\displaystyle\int_b^x \frac{Q_1(x)\,F^{(n+1)}(x)\,dx}{x^{r_1+1}}+\ldots \\ \quad + x^{r_k}\;P_k\;\;(x)\displaystyle\int_b^x \frac{Q_k(x)\,F^{(n+1)}(x)\,dx}{x^{r_k+1}} \\ \quad + x^{r_{k+1}}P_{k+1}(x)\displaystyle\int_0^x \frac{Q_{k+1}(x)\,F^{(n+1)}(x)\,dx}{x^{r_{k+1}+1}}+\ldots \\ \quad + x^{r_n}\;P_n\;\;(x)\displaystyle\int_0^x \frac{Q_n(x)\,F^{(n+1)}(x)\,dx}{z^{r_n+1}}, \end{cases}$$

où b désigne une constante arbitraire, différente de zéro. Il est inutile de faire la remarque que

$$Q_i(0) \neq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

car ce sont les déterminants wronskiens des différents groupes de $n-1$ des n intégrales linéairement indépendantes $x^{r_i}P_i(x)$.

La solution (19) est une fonction *finie* à l'origine à cause du choix convenable des limites inférieures dans les intégrales qui la composent; il n'y a qu'une exception quand une des racines r_i est nulle. Dans ce cas, si $F^{(n+1)}(0) \neq 0$, la fonction $P(x)$ a une singularité logarithmique à l'origine et par conséquent toute solution de (17) y devient infinie. Il faut donc que $F^{(n+1)}(0) = 0$; cette condition est nécessaire et suffisante.

Puisque $r_i > 0$ pour $i \leqq k$, la solution *finie* à l'origine la plus générale de (17) sera

$$C_1 x^{r_1} P_1(x) + \ldots + C_k x^{r_k} P_k(x) + P(x).$$

Par conséquent, l'équation (17) *a une solution finie à l'origine indéterminée, dépendant linéairement de k constantes arbitraires,* car les fonctions $x^{r_i}P_i(x)\,(i \leqq k)$ sont évidemment linéairement indépendantes.

S'il y a une racine nulle, pour qu'il existe des solutions finies il faut et il suffit qu'on ait

$$F(x) = x^{n+2}\,F_{n+2}(x).$$

Si cette condition est remplie il y aura la même indétermination.

Le passage par les approximations successives à l'équation générale (16) exige quelques précautions sur lesquelles il est nécessaire d'attirer l'attention. Puisque $\varphi_0(x)$ est fini, on aura

$$|\varphi_0(x)| < A$$

pour tout système de valeurs déterminées d'ailleurs quelconques des constantes $C_1, C_2, \ldots, C_k$. On aura donc, en conservant les notations précédentes,

$$|\Phi_1(x)| = \left|\int_0^x f_n(x, s)\varphi_0(s)\,ds\right| < ANx.$$

Pour déterminer $\varphi_1(x)$, nous nous servirons uniquement de la formule (19); remarquons que l'ordre d'infinitude au voisinage de l'origine des intégrales

$$\int_b^x \frac{Q_1(x)\Phi(x)\,dx}{x^{r_p+1}} \qquad (p = 1, \ldots, k),$$

qui était r_p quand $\Phi(x) = F^{(n+1)}(x)$, en supposant $F^{(n+1)}(0) \neq 0$, est à présent réduit *d'une unité* à cause de l'inégalité à laquelle satisfait $\Phi_1(x)$; par conséquent les termes

$$x^{r_p}\int_b^x \frac{Q_1(x)\Phi_1(x)\,dx}{x^{r_p+1}}$$

seront donc de l'ordre de x dans le voisinage de l'origine et par conséquent on aura, pour tout chemin d'intégration où les données $F(x)$ et $f(x, s)$ ont un sens,

$$|\varphi_1(x)| < A_1 x,$$

d'où l'on déduit

$$|\Phi_2(x)| < A_1 N \frac{x^2}{2}.$$

A chaque approximation, l'ordre d'infinitude de l'élément différentiel diminue d'une unité; par conséquent, au bout d'un nombre fini d'approximations dans tous les cas, on pourra réduire les ordres d'infinitude de façon qu'ils soient plus petits que l'unité dans toutes les

intégrales (19). A partir de ce moment, on n'a plus besoin d'introduire la constante $b \neq 0$; on n'a qu'à mettre partout zéro comme limite inférieure, et alors nous tombons exactement sur le même cas que le précédent.

Nous avons ainsi obtenu une solution qui, en mettant les constantes $C_1, C_2, \ldots, C_k$ en évidence, est de la forme

$$C_1\chi_1(x) + C_2\chi_2(x) + \ldots + C_k\chi_k(x) + \chi(x).$$

Puisque $\chi(x)$ satisfait à l'équation de Volterra (elle correspond au cas de $C_1 = C_2 = \ldots = C_k = 0$), il résulte que les fonctions $\chi_1(x), \ldots, \chi_k(x)$ seront les solutions de l'équation de Volterra sans second membre

$$\int_0^x \psi(x, s)\,\varphi(s)\,ds = 0.$$

Ces k fonctions sont linéairement indépendantes, car elles dérivent de k fonctions $x^{r_1}P_1(x), \ldots, x^{r_k}P_k(x)$ qui sont linéairement indépendantes en appliquant le *même* mécanisme des approximations successives.

Nous trouvons ainsi le résultat de M. E. Holmgren, en y faisant entrer le cas des racines nulles. Si $F^{(n+1)}(0) \neq 0$, on devra les considérer comme racines négatives; au contraire, si $F^{(n+1)}(0) = 0$, elles compteront comme racines positives de l'équation (13).

Il est clair que le raisonnement précédent s'applique aussi aux intégrales qui deviennent infinies à l'origine; il y aura un certain nombre d'approximations qui sont infinies à l'origine, mais ce nombre sera fini.

Nous tirons donc d'ici cette conséquence que dans tous les cas, si l'ensemble des termes du plus petit degré d'un noyau en x et s est n, *il y a une indétermination précisément égale à* n, c'est-à-dire, d'une façon plus précise, la solution de l'équation de Volterra dépendra dans ce cas de n constantes arbitraires. Dans le cas général, il y aura toujours des solutions qui deviendront infinies à l'origine; il n'y a qu'un seul cas où il n'existe qu'une *seule* solution finie : c'est le cas étudié par M. V. Volterra. Ces résultats généraux s'appliquent à l'équation fonctionnelle (16).

8. L'hypothèse de

$$A_0 + A_1 + \ldots + A_n \neq 0$$

a été aussi essentielle dans notre méthode, car c'est grâce à elle que l'équation différentielle linéaire

$$D(\varphi) = 0$$

a été du type de Fuchs, circonstance qui a dominé toute l'analyse précédente. Si $\alpha_0 = A_0 + A_1 + \ldots + A_n = 0$, l'équation $D(\varphi) = 0$ n'est plus sûrement du type de Fuchs; elle aura donc des intégrales avec des singularités en général essentielles à l'origine et, comme on n'a pas encore de résultat général à ce sujet, il faudra analyser chaque cas séparément.

Nous examinerons le cas de $n = 1$, c'est-à-dire de l'équation fonctionnelle

$$\int_0^x [A_1 x + A_0 s + \psi(x, s)] \varphi(s)\, ds = F(x), \tag{20}$$

où $\psi(x, s)$ est une fonction s'annulant pour $x = s = 0$ et qui ne contient pas de termes linéaires en x et s. On a $A_0 + A_1 = 0$, d'où l'on tire nécessairement $A_1 \neq 0$.

Appliquons directement la méthode du n° **6** en dérivant deux fois successivement l'équation (20), ce qui nous donne

$$\left\{\begin{aligned} &\psi(x, x)\,\varphi'(x) + [A_1 + \psi'(x, x) + \psi'_x(x, x)]\,\varphi(x) \\ &\quad + \int_0^x \psi''_{x^2}(x, s)\,\varphi(s)\, ds = F''(x), \end{aligned}\right. \tag{21}$$

$\psi'(x, x)$ désignant la dérivée par rapport à x de $\psi(x, x)$ et $\psi'_x(x, x)$ la dérivée par rapport à x de $\psi(x, s)$, où l'on a fait après $s = x$. Soit

$$\psi(x, x) = x^{\mu+1} \psi_1(x), \qquad \psi_1(0) = B \neq 0;$$

nous savons que $\mu \geqq 1$. Remarquons que les fonctions $\psi(x, x)$ et $\psi'_x(x, x)$ s'annulent pour $x = 0$; il en résulte que le coefficient de $\varphi(x)$ en (21) ne s'annule pas pour $x = 0$, y étant égal à A_1. L'équa-

tion $D(\varphi) = 0$ est donc dans ce cas de la forme

$$x^{1+\mu}(B_1 + B_2 x + \ldots)\frac{dy}{dx} + (A_1 + A_2 x + \ldots)y = F''(x).$$

Son intégrale générale est donc de la forme

$$(22) \qquad y = Ce^{\frac{\rho p(x)}{x^\mu}} + \frac{1}{B_1} e^{\frac{\rho p(x)}{x^\mu}} \int_a^x F''(x) e^{-\rho\frac{p(x)}{x^\mu}} \frac{dx}{x^{\mu+1}},$$

où l'on a posé pour abréger

$$\rho = -\frac{A_1}{\mu B_1},$$

a désigne une constante déterminée $\neq 0$ d'ailleurs quelconque et C une constante arbitraire; on a de plus

$$p(0) = 1.$$

Pour discuter l'intégrale (22) au voisinage de l'origine dans le domaine complexe, remarquons d'abord que l'exponentielle

$$e^{\frac{\rho}{x^\mu}}$$

tend vers zéro ou vers l'infini suivant que x s'approche de l'origine par un chemin compris à l'intérieur des 2μ angles formés par les droites passant par l'origine et faisant avec l'axe Ox des angles égaux à

$$(2k+1)\frac{\pi}{2\mu} \qquad (k = 0, \ldots, 2\mu - 1).$$

Plus précisément :

1° Si $\rho > 0$, $e^{\frac{\rho}{x^\mu}}$ tendra vers zéro si le chemin sur lequel x tend vers zéro est *compris* dans les angles d'indice impair (en assignant à l'angle qui contient le demi-axe positif l'indice 1) et vers ∞ dans les angles d'indice pair.

2° Si $\rho < 0$, l'inverse aura lieu.

On déduit de là que la seule intégrale qui aura un sens quel que soit le chemin sur lequel x tend vers zéro, sauf 2μ chemins exceptionnels,

est l'intégrale

$$\frac{1}{B_1} e^{\frac{\rho p(x)}{x^\mu}} \int_0^x F''(x) e^{-\frac{\rho p(x)}{x^\mu}} dx.$$

On passera au cas général en appliquant la méthode des approximations successives d'une façon identique à celle développée au nº **7**.

Considérons le cas plus intéressant des variables réelles positives; on voit directement que si $\rho > 0$, pour avoir une solution finie, il faut nécessairement prendre $C = 0$, de sorte que dans ce cas, en utilisant les approximations successives, nous obtenons une solution unique.

Si $\rho < 0$, on pourra prendre C arbitraire et nous voyons ainsi apparaître une solution dépendant linéairement d'une constante arbitraire.

Prenons le cas d'un noyau de la forme

$$f(x, s) = A_1 x + A_0 s + \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \psi_3(x, s),$$

où $A_1 + A_0 = 0$, et supposons que

$$\alpha + \beta + \gamma \neq 0.$$

Dans ce cas il est évident que $\mu = 1$, $B_1 = \alpha + \beta + \gamma$ et, par conséquent,

$$\rho = \frac{A_0}{(\alpha + \beta + \gamma)}.$$

Par conséquent, si

$$\frac{A_0}{\alpha + \beta + \gamma} > 0,$$

il y aura une seule solution réelle, tandis que, si

$$\frac{A_0}{\alpha + \beta + \gamma} < 0,$$

on en aura une infinité, dépendant d'une constante arbitraire.

Ce dernier résultat a été énoncé par M. E. Holmgren à la fin de sa Note précédemment citée.

Le cas du noyau de la forme $\frac{G(x, s)}{(x-s)^\lambda}$.

9. Dans les numéros précédents, nous avons supposé le noyau régulier pour $x = s = a$. Nous allons maintenant examiner un cas où il n'en est pas ainsi qui se présente souvent dans les applications et ayant un intérêt historique, car il généralise le fameux problème d'Abel qui a été l'origine de toutes ces recherches. C'est le cas d'un noyau de la forme

$$\frac{G(x, s)}{(x-s)^\lambda} \qquad (0 < \lambda < 1)$$

qui est infini sur toute la droite $x - s = 0$. On peut réduire ce cas au précédent de la manière suivante :

Multiplions les deux termes de l'équation donnée

$$\int_0^z \frac{G(z, s)}{(z-s)^\lambda} \varphi(s)\, ds - \psi(z) = 0 \tag{23}$$

par $\frac{1}{(x-z)^{1-\lambda}}$ et intégrons de zéro à x, ce qui nous donne

$$\int_0^x \frac{dz}{(x-z)^{1-\lambda}} \int_0^z \frac{G(z, s)\,\varphi(s)\, ds}{(z-s)^\lambda} = \int_0^x \frac{\psi(z)\, dz}{(x-z)^{1-\lambda}}, \tag{24}$$

et, appliquant la formule de Dirichlet,

$$\int_0^x \varphi(s)\, ds \int_s^x \frac{G(z, s)\, dz}{(x-z)^{1-\lambda}(z-s)^\lambda} = \int_0^x \frac{\psi(z)\, dz}{(z-x)^{1-\lambda}}.$$

Si nous posons

$$\int_s^x \frac{G(z, s)\, dz}{(x-z)^{1-\lambda}(z-s)^\lambda} = f(x, s) \tag{25}$$

et

$$\int_0^x \frac{\psi(z)\, dz}{(z-x)^{1-\lambda}} = F(x), \tag{26}$$

nous obtenons l'équation

$$\int_0^x f(x, s)\,\varphi(s)\, ds = F(x) \tag{27}$$

et nous disons que cette équation est justement du type simple de Volterra. Pour le voir simplement, faisons en (25) la transformation

$$z - s = t(x - s),$$

nous obtenons

$$f(x, s) = \int_0^1 \frac{G[s + t(x - s), s]\, dt}{(1 - t)^{1-\lambda} t^{\lambda}}$$

qui montre que $f(x, s)$ est fini et analytique dans tout le domaine où $G(x, s)$ jouit des mêmes propriétés. En effet, si M désigne une quantité plus grande que le module de $G(x, s)$ dans le domaine considéré, nous avons

$$|f(x, s)| < M \int_0^1 \frac{dt}{(1 - t)^{1-\lambda} t^{\lambda}} < M \frac{\pi}{\sin \lambda\pi}.$$

D'autre part, la propriété d'être analytique est évidente. Le procédé particulier employé pour passer de (23) à (27) nous oblige de démontrer que réciproquement toute solution de (27) satisfait aussi à (23); cela se fait très simplement en remarquant qu'on peut remonter de (27) à (24), qui peut s'écrire, en appelant $\chi(z)$ le premier membre,

$$\int_0^x \frac{\chi(z)\, dz}{(x - z)^{1-\lambda}} = 0,$$

et il suffit de démontrer que cette équation n'est possible que si $\chi(z) \equiv 0$. Pour cela, substituons $z = xt$, ce qui nous donne

$$x^{\lambda} \int_0^1 \frac{\chi(xt)\, dt}{(1 - t)^{1-\lambda}} = 0.$$

Quant t varie de zéro à x, $\chi(xt)$ varie de $\chi(0)$ à $\chi(x)$; si donc on prend x suffisamment petit, $\chi(xt)$ conservera un même signe dans tout l'intervalle d'intégration, et, par conséquent, pour que l'intégrale soit nulle, il est nécessaire que $\chi(z)$ soit nul de zéro à x, ce qui suffit pour démontrer que $\chi(z)$ est identiquement nul [1].

---

[1] Cette dernière conséquence suppose essentiellement la fonction $\chi(z)$ analytique, mais il est bon de remarquer que, dans le cas des variables réelles, le raisonnement précédent peut aussi s'appliquer, en montrant que $\chi(z)$ s'annule de proche en proche pour toutes les valeurs de z comprises dans l'intervalle considéré dans le problème.

Remarquons enfin que

$$F(x) = \int_0^x \frac{\psi(z)\,dz}{(z-x)^{1-\lambda}} = x^\lambda \int_0^1 \frac{\psi(xt)\,dt}{(1-t)^{1-\lambda}}.$$

$F(x)$ s'annule donc à l'origine comme x^λ si $\psi(0) \neq 0$; comme $\lambda < 1$, $F'(x)$ n'y serait plus régulier et, par conséquent, la formule (7) du cas simple ne serait pas applicable. Mais il est facile de voir qu'en reprenant les approximations (5), dans le cas de $G(0,0) \neq 0$, elles ont un sens parfaitement déterminé aussi dans ce cas et que la série des approximations converge dans les mêmes conditions. La seule différence sera que la solution devient infinie à l'origine avec une partie principale de la forme

$$\frac{k}{x^{1-\lambda}}.$$

Si $\psi(0) = 0$, on a $F(x) = x^{1+\lambda} F_1(x)$ et, par conséquent, on est absolument dans le cas du premier numéro. On n'a aucune difficulté essentielle, en appliquant les formules (7) et (8) des n^{os} **3** et **4**, de retrouver celles qui ont été données par M. V. Volterra dans la seconde de ses Notes et d'en déduire les formules d'Abel et de Sonine. Nous montrerons ici seulement comment on peut obtenir la formule d'Abel.

Abel avait considéré l'équation

$$\int_0^z \frac{\varphi(s)\,ds}{(z-s)^\lambda} = \psi(z) \qquad (0 < \lambda < 1),$$

qui est du type (23), dans le cas particulier de $G(x,s) = 1$. On a donc

$$f(x,s) = \frac{\pi}{\sin\lambda\pi},$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{\psi(z)\,dz}{(z-x)^{1-\lambda}},$$

et par conséquent, puisque $f_1(x,s) = 0$, $\pi(x,s) = 0$,

$$\varphi(x) = \frac{\sin\lambda\pi}{\pi} F'(x) = \frac{\sin\lambda\pi}{\pi}\left[\frac{\psi(0)}{x^{1-\lambda}} + \int_0^x \frac{\psi'(s)\,ds}{(x-s)^{1-\lambda}}\right],$$

qui résout le problème d'Abel. Cette formule confirme une remarque

précédente pour le cas de $\psi(0) \neq 0$. Si $\psi(0) = 0$, on a

$$\psi(x) = \frac{\sin\lambda\pi}{\pi} \int_0^x \frac{\psi'(s)\,ds}{(x-s)^{1-\lambda}},$$

qui est la formule même qu'a donnée Abel.

Nous avons supposé dans tout ce qui précède, avec M. Volterra, que $G(x, x)$ ne s'annule pas pour $x = 0$; dans le cas général où l'on a $G(x, x) = 0$ pour $x = 0$, on peut énoncer un résultat analogue à celui indiqué au n° **5**.

Soit n le degré de l'ensemble des termes de degré minimum en x et s par qui commence $G(x, s)$ et écrivons

$$G(z, s) = g_0(s) + g_1(s)\frac{(z-s)}{1} + \ldots + g_n(s)\frac{(z-s)^n}{n!} + \ldots.$$

On a donc

$$\begin{aligned} &G[s + t(x-s), s] \\ &\quad = g_0(s) + t(x-s)\,g_1(s) + \ldots + g_n(s)\frac{t^n(x-s)^n}{n!} + \ldots \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} f(x, s) &= \int_0^1 \frac{G[s + t(x-s), s]\,dt}{t^\lambda(1-t)^{1-\lambda}} \\ &= g_0(s)\int_0^1 \frac{dt}{t^\lambda(1-t)^{1-\lambda}} + \frac{(x-s)}{1} g_1(s)\int_0 \frac{t\,dt}{t^\lambda(1-t)^{1-\lambda}} + \ldots \\ &\qquad + \frac{(x-s)^n g_n(s)}{n!}\int_0^1 \frac{t^n\,dt}{t^\lambda(1-t)^{1-\lambda}} + \ldots. \end{aligned}$$

Rappelons-nous maintenant les formules bien connues

$$\begin{aligned} &\int_0^1 t^{n-\lambda}(1-t)^{1-\lambda}\,dt \\ &\quad = B(n-\lambda+1, \lambda) = \frac{\Gamma(n-\lambda+1)\,\Gamma(\lambda)}{\Gamma(n+1)} \\ &\qquad = \left(1 - \frac{\lambda}{1}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)\cdots\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\frac{\pi}{\sin\lambda\pi}, \end{aligned}$$

et nous avons ainsi

$$f(x,s)=\frac{\pi}{\sin\lambda\pi}\left[g_0(s)+\left(1-\frac{\lambda}{1}\right)g_1(s)\frac{(x-s)}{1!}+\ldots\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{\lambda}{1}\right)\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\frac{g_n(s)\,(x-s)^n}{n!}+\ldots\right].$$

Il résulte de là que nous nous trouvons exactement dans les mêmes conditions que dans le cas général du n° 5.

La nature de la solution dépend du signe de la partie réelle d'une équation algébrique de degré n, dont la formation est immédiate :

Si

$$g_k(s)=s^{n-k}(g_k+h_k s+\ldots) \qquad (0\leq k\leq n),$$

on obtient cette équation de l'équation (13) *en y remplaçant* α_k *par*

$$g_k\left(1-\frac{\lambda}{1}\right)\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda}{k}\right).$$

Le cas des deux limites variables.

10. Un troisième type d'équation fonctionnelle étudié par M. Volterra [1] est le type

$$\int_{px}^{qx} f(x,s)\,\varphi(s)\,ds=\mathrm{F}(x), \tag{28}$$

qui se rencontre aussi dans la théorie des équations aux dérivées partielles [2].

Dans le cas de $\left|\frac{p}{q}\right|\neq 1$, nous appliquerons une méthode à peu près identique à celle donnée par M. E. Picard pour une équation fonc-

---

[1] *Sopra alcune questioni di inversioni di integrali definiti* (*Annali di Matematica*, 2e série, t. XXV, 1896, p. 165).

[2] E. Goursat, *Sur un problème relatif à l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre* (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 1904, p. 144).

tionnelle rencontrée dans l'étude des équations aux dérivées partielles du second ordre (¹); nous supposerons $f(0, 0) \neq 0$.

On peut se borner, dans ce cas, à l'étude de l'équation (²)

$$(29) \qquad \int_{\beta x}^{x} f(x, s)\,\varphi(s)\,ds = \mathrm{F}(x),$$

où $\beta < 1$. Pour qu'il existe une solution $\varphi(x)$ finie, il est nécessaire que $\mathrm{F}(0) = 0$. Dérivant, nous obtenons

$$f(x, x)\,\varphi(x) - \beta\, f(x, \beta x)\,\varphi(\beta x) + \int_{\beta x}^{x} \frac{\partial f(x, s)}{\partial x}\,\varphi(s)\,ds = \mathrm{F}'(x).$$

Nous poserons

$$\beta\,\frac{f(x, \beta x)}{f(x, x)} = \mathrm{P}(x),$$

et

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial x} f(x, s)}{f(x, x)} = \psi(x, s),$$

$$\frac{\mathrm{F}'(x)}{f(x, x)} = \Phi_0(x).$$

Nous prendrons alors les équations des approximations successives :

$$\varphi_0(x) - \mathrm{P}(x)\,\varphi_0(\beta x) = \Phi_0,$$

$$\varphi_1(x) - \mathrm{P}(x)\,\varphi_1(\beta x) = -\int_{\beta x}^{x} \psi(x, s)\,\varphi_0(s)\,ds,$$

. . . . ,

$$\varphi_n(x) - \mathrm{P}(x)\,\varphi_n(\beta x) = -\int_{\beta x}^{x} \psi(x, s)\,\varphi_{n-1}(s)\,ds.$$

L'équation type qu'il faut étudier est donc

$$\varphi(x) - \mathrm{P}(x)\,\varphi(\beta x) = \Phi(x).$$

(¹) E. Picard, *Comptes rendus*, 13 mai 1907, p. 1009.

(²) En effet, il suffit de faire la substitution $qx = z$, où q est plus grand que p.

Pour trouver sa solution, nous remplacerons x par βx, $\beta^2 x$, ..., $\beta^n x$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
&\varphi(\beta x) \quad - \mathrm{P}(\beta x) \quad \varphi(\beta^2 x) \quad = \Phi(\beta x),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\varphi(\beta^{n-1} x) - \mathrm{P}(\beta^{n-1} x)\, \varphi(\beta^n x) \quad = \Phi(\beta^{n-1} x),\\
&\varphi(\beta^n x) \quad - \mathrm{P}(\beta^n x) \quad \varphi(\beta^{n+1} x) = \Phi(\beta^n x).
\end{aligned}$$

Multiplions-les respectivement par

$$1, \quad \mathrm{P}(x), \quad \dots, \quad \mathrm{P}(x)\,\mathrm{P}(\beta x)\dots\mathrm{P}(\beta^{n-1} x)$$

et ajoutons; nous obtenons ainsi la relation

$$\varphi(x) - \mathrm{P}(x)\,\mathrm{P}(\beta x)\dots\mathrm{P}(\beta^n x)\,\varphi(\beta^{n+1} x) = \sum_{p=0}^{p=n} \Phi(\beta^p x).$$

Faisons maintenant croître n indéfiniment; puisque $\beta < 1$, on a

$$\lim_{n=\infty} \varphi(\beta^n x) = \varphi(0).$$

D'autre part, le produit

$$\prod_1^\infty \mathrm{P}(\beta^p x)$$

est nul; en effet, son facteur général a pour expression

$$\frac{\beta\, f(\beta^{n-1} x, \beta^n x)}{f(\beta^{n-1} x, \beta^{n-1} x)},$$

dont la limite, pour $n = \infty$, est donc égale à $\beta < 1$, ce qui montre que le produit précédent tend uniformément vers 0, dans tout le domaine fini de x, où $f(x, x)$ garde un sens. On a donc ainsi

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = \Phi(x) + \mathrm{P}(x)\,\Phi(\beta x) + \dots\\
+ \mathrm{P}(x)\dots\mathrm{P}(\beta^{n-1} x)\,\Phi(\beta^n x) + \dots.
\end{aligned}$$

On aura donc pour toute approximation

$$\begin{aligned}
\varphi_k(x) = \Phi_k(x) + \mathrm{P}(x)\,\Phi_k(\beta x) + \dots\\
+ \mathrm{P}(x)\dots\mathrm{P}(\beta^{n-1} x)\,\Phi_k(\beta^n x) + \dots,
\end{aligned}$$

si l'on pose

$$\Phi_k(x) = -\int_{\beta x}^{x} \psi(x, s)\,\varphi_{k-1}(s)\,ds.$$

La série du second membre converge absolument et uniformément dans un cercle décrit de l'origine comme centre et ne contenant aucun zéro de $f(x, x)$ et aucune singularité de $F'(x)$, même pour $\varphi_0(x)$, pour laquelle on a

$$\Phi_0(0) \neq 0.$$

En effet, pour n suffisamment grand, on a

$$P(x)\dots P(\beta^{n-1}x)\,\Phi(\beta^n x) < M\gamma^n,$$

où $\beta < \gamma < 1$, ce qui démontre la convergence absolue et uniforme de la première approximation. Pour les autres, on a un résultat plus précis; en effet, on a

$$|\Phi_1(x)| < ak(1-\beta)x$$

en posant

$$|\varphi_0(x)| < a \qquad \text{et} \qquad |\psi(x, s)| < k.$$

On aura donc

$$|\varphi_1(x)| < Aak(1-\beta)x(1+\beta+\beta^2+\dots) < Aakx,$$

en prenant pour A une quantité plus grande que les modules de tous les produits $\prod_1^n P(\beta^i x)$. Cette inégalité assure la convergence absolue et uniforme de la somme des approximations successives dans le domaine précédemment défini.

On aura

$$|\Phi_2(x)| < A\,ak^2\frac{x^2}{2}(1-\beta^2)$$

et, par conséquent,

$$|\varphi_2(x)| < A^2ak^2\frac{x^2}{2}(1-\beta^2)(1+\beta^2+\beta^4+\dots+\beta^{2k}+\dots)$$
$$< aA^2k^2\frac{x^2}{1.2},$$

et la loi est évidemment générale,

$$|\varphi_n(x)| < a \frac{A^n k^n x^n}{1.2\ldots n},$$

ce qui démontre notre proposition.

Nous examinerons plus loin le cas $\frac{p}{q} = -1$, en le rattachant, suivant une remarque de M. V. Volterra, à la résolution d'un système de deux équations simultanées de Volterra.

La généralisation de M. Burgatti.

11. Nous allons nous occuper maintenant d'une généralisation de l'équation de Volterra, due à M. E. Burgatti. Dans deux Notes communiquées à l'Académie de Rome, M. Burgatti (¹) a considéré l'équation fonctionnelle suivante,

$$(30) \quad \int_0^x \left[f_0(x,s)\,\varphi(s) + f_1(x,s)\frac{d\varphi}{ds} + \ldots + f_n(x,s)\frac{d^n\varphi}{ds^n} \right] ds = F(x),$$

où figurent aussi les dérivées jusqu'à l'ordre n de la fonction inconnue; si $n = 0$, on retombe sur l'équation de Volterra. M. Burgatti examine d'une façon détaillée seulement le cas de l'équation plus simple

$$(31) \qquad \int_0^x \left[f_1(x,s)\frac{d\varphi}{ds} + f_0(x,s)\,\varphi(s) \right] ds = F(x),$$

où l'on a $f_1(x,s) \equiv 1$. On peut remarquer que dans ce cas l'équation (31) se transforme immédiatement en une équation de Volterra, car elle peut s'écrire

$$\varphi(x) - \varphi(0) + \int_0^x f_0(x,s)\,\varphi(s)\,ds = F(x),$$

et on lit ainsi, d'une façon évidente, le résultat de M. Burgatti suivant lequel l'équation (31), dans l'hypothèse $f_1(x,s) = 1$, admet une solution et une seule prenant à l'origine une valeur donnée quelconque.

(¹) *Atti della reale Accademia dei Lincei*, t. XII, 1903, p. 596.

Nous allons montrer que dans le cas général de l'équation (30), si $f_n(x, x)$ n'est pas identiquement nul, il y aura une solution et une seule prenant à l'origine, *ainsi que ses $n-1$ premières dérivées,* des valeurs données à l'avance. Il y a une donnée de plus d'arbitraire de ce qu'on pourrait s'y attendre; cela tient à la forme particulière de l'équation différentielle linéaire d'ordre $n-1$ dont dépend la solution du problème.

Nous transformerons d'abord l'équation (30) en éliminant de sous le signe d'intégration toutes les dérivées de la fonction inconnue. Pour cela il suffit d'appliquer la formule d'intégration par parties généralisées; posons

$$\begin{aligned} f_k(x, s) &= f_{k0}(s) + f_{k1}(s)\frac{s-x}{1} + \ldots + f_{kn}(s)\frac{(s-x)^n}{n!} + \ldots \\ &= \chi_{k0}(x) + s\chi_{k1}(x) + \ldots + \frac{s^n}{n!}\chi_{kn}(x) + \ldots, \end{aligned}$$

nous obtenons ainsi l'équation

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} & a_0(x)\varphi(x) + \ldots + a_{n-1}(x)\varphi^{(n-1)}(x) - b_0(x)\varphi(0) - \ldots \\ & \qquad - b_{n-1}(x)\varphi^{(n-1)}(0) + \int_0^x \psi_n(x, s)\varphi(s)\,ds = \mathrm{F}(x), \end{aligned} \right.$$

où l'on a

$$\left. \begin{aligned} a_p(x) &= f_{p+1\,0}(x) - f_{p+2\,1}(x) + \ldots + (-1)^{n-p-1} f_{n\,n-p-1}(x) \\ b_p(x) &= \chi_{p+1\,0}(x) + \ldots \qquad\qquad + (-1)^{n-p-1}\chi_{n\,n-p-1}(x) \end{aligned} \right\} \quad (p = 0, \ldots, n-1)$$

et

$$\psi_n(x, s) = f_0(x, s) - \frac{\partial f_1(x, s)}{\partial s} + \ldots + (-1)^n \frac{\partial^n f_n(x, s)}{\partial s^n}.$$

L'équation (32) est du même type que l'équation (16) du n° **6**, sauf la présence des termes qui contiennent les expressions

$$\varphi^{(k)}(0) \qquad (k = 0, \ldots, n-1).$$

Nous l'étudierons donc aussi par la méthode des approximations successives, en prenant, pour fixer les idées, le cas de $n = 2$; on a donc à

étudier l'équation

$$(32')\quad \begin{cases} a_0(x)\varphi(x) - b_0(x)\varphi(0) + a_1(x)\varphi'(x) - b_1(x)\varphi'(0) \\ \qquad + \lambda \int_0^x \psi_2(x,s)\varphi(s)\,ds = F(x). \end{cases}$$

Si l'on pose

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots,$$

on obtient les équations des approximations successives :

$$(33^a)\quad \begin{cases} a_0(x)\varphi_0(x) - b_0(x)\varphi_0(0) + a_1(x)\varphi_0'(x) - b_1(x)\varphi_0'(0) = F(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_0(x)\varphi_n(x) - b_0(x)\varphi_n(0) + a_1(x)\varphi_n'(x) - b_1(x)\varphi_n'(0) \\ \quad = -\int_0^x \psi_2(x,s)\varphi_{n-1}(s)\,ds. \end{cases}$$

Soit y_1 une intégrale de l'équation linéaire homogène

$$a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} = 0.$$

L'intégrale générale de la première équation du groupe (33) sera donc de la forme

$$Cy_1 + P_0(x)\varphi_0(0) + P_1(x)\varphi_0'(0) + y_1\int_0^x Q_1(x)F(x)\,dx,$$

où les fonctions $P_0(x)$, $P_1(x)$ et $Q(x)$ sont des fonctions régulières à l'origine et ne dépendant que du premier membre de l'équation (33^a), qui est le même pour les équations de *toutes* les approximations.

Remarquons que, si l'on fait $x = 0$, le premier membre de (33^a) se réduit à zéro, car $a_0(0) = b_0(0)$ et $a_1(0) = b_1(0)$; il faut donc, pour que le problème soit possible, que $F(0) = 0$. S'il en est ainsi, les valeurs $\varphi_0(0)$ et $\varphi_0'(0)$ restent complètement arbitraires. On peut donc déterminer $\varphi_0(x)$ de façon qu'elle prenne, ainsi que sa dérivée première, des valeurs tout à fait arbitraires; nous déterminons $\varphi_0(x)$ de

cette façon. Pour déterminer $\varphi_1(x)$ on se servira de l'équation

$$a_0(x)\varphi_1(x) - b_0(x)\varphi_1(0) + a_1(x)\varphi_1'(x) - b_1(x)\varphi_1'(0)$$
$$= -\int_0^x \psi_2(x,s)\varphi_0(s)\,ds = \Phi_1(x),$$

et l'on prendra l'intégrale qui *s'annule* ainsi que sa première dérivée à l'origine; on aura donc

$$\varphi_1(0) = \varphi_1'(0) = C = 0$$

et, par conséquent,

$$\varphi_1(x) = y_1 \int_0^x Q(x)\Phi_1(x)\,dx.$$

Toutes les autres approximations seront déterminées par les mêmes conditions initiales; par conséquent,

$$\varphi_n(x) = y_1 \int_0^x Q(x)\Phi_n(x)\,dx,$$

et la convergence uniforme et absolue de la série d'approximations en résulte sans peine. Soient M le module maximum de $\varphi_0(x)$ dans son domaine de convergence; N celui de $\psi_2(x,s)$ dans la même région, par rapport aux deux variables x et s; Q et K ceux de $Q(x)$ et de y_1.

Des inégalités évidentes

$$|\varphi_0(x)| < M,$$
$$|\Phi_1(x)| < NMx$$

et

$$|\varphi_1(x)| < aM\frac{x^2}{2},$$
$$|\Phi_2(x)| < aNM\frac{x^3}{1.2.3}$$

et

$$|\varphi_2(x)| < Ma^2\frac{x^4}{4!},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$|\varphi_n(x)| < Ma^n\frac{x^{2n}}{2n!},$$

où $a = k\mathrm{QN}$, on déduit la convergence absolue et uniforme dans tout domaine fini de λ, et cette circonstance rend la vérification inutile en vertu d'une remarque déjà faite.

La solution ainsi obtenue prend bien à l'origine, ainsi que sa dérivée première, les valeurs arbitraires qu'on a imposées à $\varphi_0(x)$, car les autres approximations et leurs dérivées s'annulent d'après la manière même dont elles ont été formées.

Il n'y a aucune difficulté à étendre le raisonnement précédent au cas général. La première approximation sera donnée par l'équation

$$(34)\quad \begin{cases} a_{n-1}(1)\,\varphi_0^{(n)}(x) - b_{n-1}(x)\,\varphi_0^{(n-1)}(0) + \ldots \\ \qquad\qquad + a_0(x)\,\varphi_0(x) - b_0(x)\,\varphi_0(0) = \mathrm{F}(x). \end{cases}$$

On doit avoir $\mathrm{F}(0) = 0$, de sorte qu'on peut se donner arbitrairement $\varphi(x)$ et ses $n - 1$ premières dérivées à l'origine. Nous prendrons pour $\varphi_0(x)$ une pareille solution, tandis que pour les autres, celles qui s'annulent ainsi que leurs $n - 1$ premières dérivées pour $x = 0$. On obtient ainsi pour $\varphi_n(x)$ une expression de la forme

$$(35)\quad \varphi_n(1) = y_1 \int_0^x \mathrm{Q}_1(x)\,\Phi_n(x)\,dx + \ldots + y_{n-1}\int_0^x \mathrm{Q}_{n-1}(x)\,\Phi_n(x)\,dx,$$

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ étant un système de solutions fondamental de l'équation différentielle

$$a_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_0(x)\,y = 0,$$

de sorte que la démonstration de la convergence des approximations est identique à celle donnée pour le cas de $n = 2$.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, $f_n(x, x)$ non nul pour $x = 0$. Des circonstances analogues à celles qui se sont présentées dans le cas général de l'équation de Volterra vont diminuer le degré d'arbitraire de la solution, et même des conditions auxiliaires peuvent survenir. Toute la question se réduit à l'étude d'une équation différentielle linéaire d'ordre n avec second membre et à un mécanisme d'approximations successives; elle peut être traitée par les méthodes précédentes suivant les différents cas qui peuvent se présenter dans les applications.

Les équations de Volterra non linéaires.

12. Une généralisation de l'équation de Volterra est de ne plus la supposer linéaire par rapport à la fonction inconnue.

Le type

$$(36)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x) + \int_0^x [f_0(x, s)\varphi(s) + f_1(x,s)\varphi^2(s) + \ldots \\ + f_n(x, s)\varphi^n(s)]\, ds = \mathrm{F}(x), \end{aligned} \right.$$

ou même le type plus général

$$(37)\qquad \varphi(x) + \int_0^x \Phi[x, s, \varphi(s)]\, ds = \mathrm{F}(x),$$

où $\Phi(x, s, t)$ désigne une fonction bien déterminée des trois variables x, s et t, peut être traité par une méthode analogue à celle suivie par M. E. Picard dans sa démonstration classique du théorème d'existence relatif à l'équation différentielle

$$(38)\qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Remarquons d'ailleurs que cette dernière équation n'est qu'un cas particulier de l'équation (37); en effet, elle peut encore s'écrire sous la forme

$$y(x) - \int_0^x f[s, y(s)]\, ds = \mathrm{C},$$

où C désigne une constante arbitraire. Elle est donc du type (37), mais son noyau est indépendant de x et la fonction du second membre se réduit à une constante.

Montrons comment on peut étudier l'équation générale (37). Nous prenons comme première approximation

$$\varphi_0(x) = \mathrm{F}(x)$$

et comme équation de récurrence pour les approximations

$$\varphi_n(x) = F(x) - \int_0^x \Phi[x, s, \varphi_{n-1}(s)]\,ds.$$

Les conditions d'existence de la fonction $\Phi[x, s, \varphi_{n-1}(s)]$ vont introduire un raisonnement analogue à celui qu'on fait pour l'équation (38). Supposons que la fonction $\Phi(x, s, t)$ est continue et parfaitement déterminée ([1]) lorsque x est en valeur absolue $< a$ et lorsque $|t| < b$; nous aurons aussi, lorsque $|x| < a$,

$$F(x) - |F(s)| < kx.$$

La seconde approximation étant donnée par la relation

$$\varphi_1(x) = F(x) - \int_0^x \Phi[x, s, F(s)]\,ds,$$

il faut nécessairement que

$$|F(o)| < b.$$

L'expression précédente doit avoir un sens; soit a' un nombre tel que

$$|F(x)| < b,$$

lorsque

$$|x| < a'.$$

Dans l'intervalle égal au plus petit des nombres a et a', l'expression de $\varphi_1(x)$ aura un sens parfaitement déterminé et l'on aura

$$|\varphi_1(x)| < (k + m)x,$$

en désignant par m le module maximum de $\Phi(x, s, t)$ lorsque x est compris dans cet intervalle et lorsque $|t| < b$.

([1]) Nous considérons le cas des variables réelles où les hypothèses à faire sont plus larges : le raisonnement s'applique *a fortiori* pour le cas des variables complexes et des fonctions analytiques.

Si nous désignons maintenant par h le plus petit des nombres a, a' et $\frac{b}{k+m}$, toutes les approximations auront un sens, pour $|x| < h$.

Comme dans le cas de l'équation (38) c'est la limite vers laquelle tend $\varphi_n(x)$ pour n infini qui donne ici la solution cherchée. Pour le voir, utilisons la relation

$$\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x) = -\int_0^x \{\Phi[x, s, \varphi_{n-1}(s)] - \Phi(x, s, \varphi_{n-2}(s)]\} ds.$$

Un raisonnement absolument identique à celui relatif à l'équation (38) nous montre que la série

$$\varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + \ldots + (\varphi_n - \varphi_{n-1}) + \ldots$$

converge uniformément et absolument dans l'intervalle Oh, ce qui démontre, comme c'est bien connu, à la fois l'existence d'une solution et d'une seule.

Pour le cas de l'équation (38) on a $k = 0$, $a' = \infty$, puisque

$$F(x) \equiv F(0) = c;$$

donc h est le plus petit des deux nombres a et $\frac{b}{m}$, et nous retrouvons ainsi le résultat obtenu par M. E. Picard.

Pour l'équation (36) on a $b = \infty$, donc aussi $a' = \infty$; la solution sera donc valable dans tout l'intervalle où les fonctions $f_i(x, s)$ $(i = 1, \ldots, n)$ et $F(x)$ existent.

Le succès de la méthode des approximations successives pour ce type d'équations de Volterra non linéaires tient uniquement à la présence de $\varphi(x)$ en dehors du signe d'intégration.

Des difficultés d'une nature toute nouvelle se présentent lorsque cette circonstance n'a plus lieu. Prenons l'équation

$$\int_0^x [f_0(x, s) + f_1(x, s)\varphi(s) + \ldots + f_n(x, s)\varphi^n(s)] ds = F(x).$$

Si nous la dérivons par rapport à x pour obtenir des termes conte-

nant $\varphi(x)$ en dehors du signe d'intégration, nous obtenons

$$(39)\quad \left\{ \begin{aligned} & f_0(x,x) + f_1(x,x)\varphi(x) + \ldots + f_n(x,x)\varphi^n(x) \\ & \qquad + \int_0^x \left[\frac{\partial f_0}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x}\varphi^n(s)\right] ds = \mathrm{F}'(x). \end{aligned} \right.$$

Dans ce cas, les approximations seront données par des équations algébriques de degré n, dont les termes contenant la fonction inconnue sont les mêmes pour toutes les approximations. Par conséquent, chaque approximation sera, en général, une fonction multiforme de x, la relation de récurrence est

$$\begin{aligned} & f_0(x,x) + f_1(x,x)\varphi_p(x) + \ldots + f_n(x,x)\varphi_p^n(x) \\ & \quad = \mathrm{F}'(x) - \int_0^x \left[\frac{\partial f_0}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x}\varphi_{p-1}^n(s)\right] ds \end{aligned}$$

avec

$$f_0(x,x) + f_1(x,x)\varphi_0(x) + \ldots + f_n(x,x)\varphi_0^n(x) = \mathrm{F}'(x)$$

comme équation initiale.

La ramification de ces approximations n'est pas la même, quoique le premier membre des équations algébriques dont on les déduit est le *même* pour toutes les approximations. Cela tient au second membre, différant avec chaque approximation, ce qui, contrairement au cas des équations différentielles linéaires, a son influence sur la ramification de la solution.

Par conséquent, en général, on ne peut pas même trouver une surface de Riemann sur laquelle toutes les approximations soient des fonctions uniformes, ce qui nous rend bien compte de la nature du problème.

Les équations de Volterra à plusieurs inconnues ou à plusieurs variables indépendantes.

15. Il nous reste maintenant à traiter des systèmes d'équations de Volterra ([1]) et de l'équation de Volterra à plusieurs variables indépendantes.

([1]) V. Volterra, *Atti della r. Acc. dei Lincei, loc. cit.*

Montrons rapidement comment la méthode des approximations successives permet de démontrer simplement l'existence unique d'une solution dans ce dernier cas. Nous prendrons deux variables réelles indépendantes et soit

$$\int_0^x \int_0^y f(x, y; s, t)\,\varphi(s, t)\,ds\,dt = \mathrm{F}(x, y)$$

l'équation à étudier. Dérivons-la par rapport à x et y successivement, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} f(x, y; x, y)\,\varphi(x, y) + \int_0^x f'_x(x, y; s, y)\,\varphi(s, y)\,ds \\ + \int_0^y f'_y(x, y; x, t)\,\varphi(x, t)\,dt \\ + \int_0^x \int_0^y f''_{xy}(x, y; s, t)\,\varphi(s, t)\,ds\,dt = \mathrm{F}''_{xy}(x, y). \end{aligned}$$

Divisant par $f(x, y; x, y)$ que nous supposerons différent de zéro pour $x = y = 0$, nous pourrons écrire cette dernière équation sous la forme

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) + \int_0^x f_1(x, y, s)\,\varphi(s, y)\,ds \\ + \int_0^y f_2(x, y, s)\,\varphi(x, s)\,ds \\ + \int_0^x \int_0^y f_3(x, y, s, t)\,\varphi(s, t)\,dt = \Phi(x, y). \end{aligned}$$

Les équations des approximations sont

$$\varphi_0(x, y) = \Phi(x, y)$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_n(x, y) = -\int_0^x f_1\,\varphi_{n-1}(s, y)\,ds \\ -\int_0^y f_2\,\varphi_{n-1}(x, s)\,ds - \int_0^x \int_0^y f_3\,\varphi_{n-1}(s, t)\,ds\,dt. \end{aligned}$$

Soit $(\mathrm{O}h, \mathrm{O}k)$ le rectangle où les fonctions $f_1(x, y, s)$, $f_2(x, y, s)$

et $f_3(x, y, s, t)$ sont finies et continues par rapport aux quatre variables x, y, s, t, et soient A, B et C les maxima respectifs de leurs valeurs absolues dans ce rectangle. Il est évident que, dans le rectangle $(O\alpha, O\beta)$, où $\alpha \leqq h$, $\beta \leqq k$, on a

$$|\varphi_0(x, y)| < k,$$
$$|\varphi_1(x, y)| < k(A\alpha + B\beta + C\alpha\beta),$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$
$$|\varphi_n(x, y)| < k(A\alpha + B\beta + C\alpha\beta)^n.$$

Si donc on prend α et β suffisamment petits de manière que

$$A\alpha + B\beta + C\alpha\beta < 1,$$

on est assuré de la convergence absolue et uniforme de la série des approximations. La solution est unique dans ce rectangle en vertu d'un raisonnement répété déjà plusieurs fois.

Si l'on veut étendre cette démonstration au rectangle (Oh, Ok) tout entier, on n'a qu'à considérer l'équation *majorante*

$$\varphi(x, y) + A\int_0^x \varphi(s, y)\,ds + B\int_0^y \varphi(x, s)\,ds + C\int_0^x\int_0^y \varphi(s, t)\,ds\,dt = \Phi(x, y),$$

qui revient évidemment à l'intégration de l'équation hyperbolique

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + A\frac{\partial z}{\partial x} + B\frac{\partial z}{\partial y} + Cz = \Phi''_{xy}(x, y),$$

avec des valeurs données sur les caractéristiques Ox et Oy, ce qui rentre dans une catégorie de problèmes d'existence étudiés depuis longtemps par M. E. Picard (¹) et dont la solution est extrêmement simple à l'aide de la méthode des approximations successives.

(¹) *Voir*, par exemple, G. Darboux, *Théorie générale des surfaces*, t. IV; dans l'Appendice, la Note de M. E. Picard.

14. Le principe de la méthode que nous avons employée jusqu'ici s'étend sans aucune difficulté aux systèmes linéaires d'équations de Volterra. Prenons toujours, pour fixer les idées, le cas de deux équations à deux fonctions inconnues

$$\int_0^x A_1(x,s)\varphi_1(s)\,ds + \int_0^x A_2(x,s)\varphi_2(s)\,ds = F(x),$$
$$\int_0^x B_1(x,s)\varphi_1(s)\,ds + \int_0^x B_2(x,s)\varphi_2(s)\,ds = \Phi(x).$$

Si nous dérivons une fois les deux équations, nous obtenons

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} & A_1(x,x)\varphi_1(x) + A_2(x,x)\varphi_2(x) \\ & \qquad + \int_0^x \frac{\partial A_1}{\partial x}(x,s)\varphi_1(s)\,ds + \int_0^x \frac{\partial A_2(x,s)}{\partial x}\varphi_2(s)\,ds = F'(x), \\ & B_1(x,x)\varphi_1(x) + B_2(x,x)\varphi_2(x) \\ & \qquad + \int_0^x \frac{\partial B_1}{\partial x}(x,s)\varphi_1(s)\,ds + \int_0^x \frac{\partial B_2(x,s)}{\partial x}\varphi_2(s)\,ds = \Phi'(x). \end{aligned}\right.$$

Si le déterminant

$$D(x) = \begin{vmatrix} A_1(x,x) & A_2(x,x) \\ B_1(x,x) & B_2(x,x) \end{vmatrix}$$

est différent de zéro pour $x = 0$, il n'y a aucune difficulté à traiter le problème; on peut alors résoudre le système (40) par rapport à $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$, ce qui nous donne

$$\varphi_1(x) + \int_0^x H_1(x,s)\varphi_1(s)\,ds + \int_0^x H_2(x,s)\varphi_2(s)\,ds = M(x),$$
$$\varphi_2(x) + \int_0^x K_1(x,s)\varphi_1(s)\,ds + \int_0^x K_2(x,s)\varphi_2(s)\,ds = N(x),$$

et l'application de la méthode des approximations successives est dès lors intuitive.

Si $D(0) = 0$, le raisonnement précédent n'est plus applicable; il faut alors pousser la dérivation du système (40) jusqu'à ce que nous

obtenions, en dehors du signe d'intégration, un système de deux équations différentielles du type de Fuchs. Esquissons la marche à suivre :

Si n est l'ordre du zéro $x = 0$ pour $D(x)$, il y a deux cas à distinguer suivant que n est pair ou impair :

1° Si $n = 2k + 1$, il faudra différentier k fois l'une des équations du système (40) et $k + 1$ fois l'autre;

2° Si $n = 2k$, il faudra différentier k fois les deux équations.

On obtient ainsi dans les deux cas un système de deux équations à deux fonctions inconnues, qui peut se transformer dans un système de deux équations différentielles de Fuchs à une seule fonction inconnue d'ordre n. Nous aurons *deux* équations algébriques déterminantes qui s'introduisent dans la discussion du problème et la nature de la solution dépendra toujours du signe de la partie réelle de leurs racines; nous aurons aussi deux conditions analogues à $\sum_{i=1}^{n} A_i \neq 0$.

Nous allons appliquer cette méthode à l'étude d'un cas particulier que nous avons laissé de côté parce qu'il nécessitait un étude à part et qui, suivant une remarque de M. V. Volterra, peut se réduire à l'étude d'un système de deux équations de Volterra. Il s'agit de l'équation

$$\int_{-x}^{+x} f(x, s)\,\varphi(s)\,ds = F(x), \tag{41}$$

qui est du type traité dans le n° **10**, dans le cas $\frac{p}{q} = -1$.

Soit

$$f(x,s) = a + bx + cs + \alpha x^2 + \beta xs + \gamma s^2 + f_3(x,s) \quad (abc \neq 0) \tag{41'}$$

le développement du noyau et posons

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \qquad \text{et} \qquad \varphi(-x) = \varphi_2(x).$$

On peut alors écrire l'équation précédente sous la forme

$$\int_0^x f(x, s)\,\varphi_1(s)\,ds + \int_0^x f(x, -s)\,\varphi_2(s)\,ds = F(x),$$

et en changeant x en $-x$

$$\int_0^x f(-x,s)\varphi_1(s)\,ds+\int_0^x f(-x,-s)\varphi_2(s)\,ds=-\mathrm{F}(-x).$$

Nous obtenons ainsi deux équations qui, dans notre hypothèse, sont distinctes; on en déduit par dérivation

$$(42)\quad\left\{\begin{aligned}&f(x,x)\varphi_1(x)+f(x,-x)\varphi_2(x)\\&\quad+\int_0^x f'_x(x,s)\varphi_1(s)\,ds+\int_0^x f'_x(x,-s)\varphi_2(s)\,ds=\mathrm{F}'(x),\\&f(-x,x)\varphi_1(x)+f(-x,-x)\varphi_2(x)\\&\quad-\int_0^x f'_x(-x,s)\varphi_1(s)\,ds-\int_0^x f'_x(-x,-s)\varphi_2(s)\,ds=\mathrm{F}'(-x).\end{aligned}\right.$$

Dans notre cas on a

$$\mathrm{D}(x)=\begin{vmatrix}f(x,x) & f(x,-x)\\ f(-x,x) & f(-x,-x)\end{vmatrix}=-4bcx^2+\ldots.$$

Par conséquent $\mathrm{D}(0)=0$ et $n=2$; il faut donc différentier encore une fois les équations (42), ce qui nous donne

$$\begin{aligned}&f(x,x)\varphi'_1(x)+f(x,-x)\varphi'_2(x)+[f'(x,x)+f'_x(x,x)]\varphi_1(x)\\&\quad+[f'(x,-x)+f'_x(x,-x)]\varphi_2(x)+\int_0^x f''_{x^2}(x,s)\varphi_1(s)\,ds\\&\qquad\qquad+\int_0^x f''_{x^2}(x,-s)\varphi_2(s)\,ds=\mathrm{F}''(x)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&f(-x,x)\varphi'_1(x)+f(-x,-x)\varphi'_2(x)\\&\quad+[f'(-x,x)-f'_x(-x,x)]\varphi_1(x)\\&\quad+[f'(-x,-x)-f'_x(-x,-x)]\varphi_2(x)\\&\quad+\int_0^x f''_{x^2}(-x,s)\varphi_1(s)\,ds+\int_0^x f''_{x^2}(-x,-s)\varphi_2(s)\,ds=-\mathrm{F}''(-x).\end{aligned}$$

Dans ces formules $f'_x(u, v)$ et $f''_{x^2}(u, v)$ désignent pour abréger les deux premières dérivées partielles de f par rapport à u.

Si donc nous nous reportons au développement (41′) de $f(x, s)$, nous voyons que les équations des approximations successives sont de la forme

$$(43) \quad \begin{cases} A(x)\varphi'_1(x) + B(x)\varphi'_2(x) \\ \quad + C(x)\varphi_1(x) + D(x)\varphi_2(x) \qquad = H(x), \\ B(-x)\varphi'_1(x) + A(-x)\varphi'_2(x) \\ \quad - D(-x)\varphi_1(x) - C(-x)\varphi_2(x) = K(x); \end{cases}$$

où l'on a

$$A(x) = a + (b + c)x + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + \ldots,$$
$$B(x) = a + (b - c)x + (\alpha - \beta + \gamma)x^2 + \ldots,$$
$$C(x) = 2b + c + (4\alpha + 3\beta + 2\gamma)x + \ldots,$$
$$D(x) = 2b - c + (4\alpha - 3\beta + 2\gamma)x + \ldots.$$

Si nous considérons d'abord les équations (43) sans second membre, on en déduit par l'élimination de $\varphi_1(x)$, l'équation du second ordre

$$(44) \qquad M(x)\varphi''_2(x) + N(x)\varphi'_2(x) + P(x)\varphi_2(x) = 0;$$

où l'on a

$$M(x) = \begin{vmatrix} A(x) & B(x) \\ B(-x) & A(-x) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A(x) & C(x) \\ B(-x) & -D(-x) \end{vmatrix} = 16acb^2x^2 + \ldots,$$

$$N(x) = \begin{vmatrix} A(x) & A'(x) + C(x) & C'(x) & B'(x) + D(x) \\ B(-x) & -B'(-x) - D(-x) & D'(-x) & -A'(-x) - C(-x) \\ 0 & A(x) & C(x) & B(x) \\ 0 & B(-x) & -D(-x) & A(-x) \end{vmatrix}$$
$$= 16ab(3bc - 5a\beta)x + \ldots$$

et

$$P(x) = \begin{vmatrix} A(x) & A'(x)+C(x) & C'(x) & D'(x) \\ B(-x) & -B'(-x)-D(-x) & D'(-x) & C'(-x) \\ 0 & A(x) & C(x) & B(x) \\ 0 & B(-x) & -D(-x) & A(-x) \end{vmatrix}$$
$$= 48ab(bc - a\beta) + \ldots.$$

L'équation (44) est donc bien du type de Fuchs par rapport à l'origine et l'équation déterminante correspondante est

$$(45) \qquad \rho(\rho-1)cb + \rho(3cb - 5a\beta) + 3bc - 3a\beta = 0.$$

L'équation à laquelle satisfait $\varphi_1(x)$ s'en déduit immédiatement; elle est

$$(46) \quad M(-x)\varphi_1''(x) - N(-x)\varphi_1'(x) + P(-x)\varphi_1(x) = 0;$$

d'où il résulte que l'équation déterminante *coïncide avec* (45). Dans ce problème particulier, il arrive donc que les deux équations algébriques qui doivent jouer le rôle essentiel se réduisent à une seule.

Passons maintenant aux équations (43) avec second membre, c'est-à-dire aux équations des approximations proprement dites; pour cela remarquons d'abord que si $y_1(x)$ et $z_1(x)$ sont deux solutions linéairement indépendantes pour l'équation (44), les fonctions $-y_1(-x)$, $-z_1(-x)$ en seront deux remplissant la même condition pour (46). Il en résulte que nous pouvons appliquer la méthode de la variation des constantes en partant des solutions

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \quad my_1(x) \quad + nz_1(x), \\ \varphi_2(x) &= -my_1(-x) - nz_1(-x) \end{aligned}$$

et nous obtenons immédiatement

$$(47) \quad \begin{cases} m = \displaystyle\int_0^x \frac{\lambda_1 H + \mu_1 K}{x^{r_1+2}} dx, \\ n = \displaystyle\int_0^x \frac{\lambda_2 H + \mu_2 K}{x^{r_2+2}} dx, \end{cases}$$

où λ_1 et μ_1 sont des fonctions qui en général ne s'annulent pas pour $x = 0$; elles ne s'annulent que si r_1 et r_2 sont des nombres entiers impairs. Il faudra donc, en général, pour que le problème admette une solution finie, que $F(x) = x^3 F_1(x)$, car alors, à partir de la première, toutes les approximations où m et n ont les valeurs (47) seront finies. Le raisonnement est absolument analogue à celui déjà fait pour le cas d'une seule équation de Volterra, et nous arrivons donc à cette conclusion :

Si l'équation (45) a ses deux racines à parties réelles négatives et si $F(x) = x^3 F_1(x)$, l'équation fonctionnelle (41) admet une seule solution finie dans un cercle où $D(x)$ n'a aucun autre zéro que l'origine et où toutes les autres données sont finies et continues.

La méthode que nous avons employée nous a donné à la fois $\varphi(x)$ et $\varphi(-x)$; si l'on se borne au domaine des variables réelles on a ainsi les valeurs de notre fonction inconnue sur l'axe positif et sur l'axe négatif et le problème est ainsi complètement résolu. Dans le cas des variables complexes, il faut encore voir que nous avons la même fonction; or cela résulte simplement des expressions (47) et ayant égard aux seconds membres des équations (43).

DEUXIÈME PARTIE.

1. Dans le n° **5** de la première Partie nous avons montré que, si le noyau est un polynome en x de degré n, la résolution de l'équation de Volterra revient à l'intégration d'une équation différentielle linéaire d'ordre n avec certaines conditions initiales données. Nous voulons maintenant montrer que le mécanisme des approximations successives n'a fait qu'éviter l'intégration d'une équation différentielle linéaire d'ordre infini, en examinant le cas d'un noyau $f(x, s)$ fonction entière en x d'ordre au plus égal à 1 pour toute valeur finie de s. Il existe un intime lien entre la théorie de l'intégration des équations différentielles linéaires d'ordre fini et infini et celle de la résolution d'une équation de Volterra. On peut facilement mettre toute équation différentielle linéaire d'ordre fini sous la forme d'une équation de Volterra, et cette transformation permet de trouver, pour les intégrales d'une équation différentielle linéaire d'ordre fini, un développement donné par les approximations successives qui est valable dans tout le domaine d'existence de ces intégrales.

Ces résultats ont été déjà obtenus en appliquant *directement* la méthode des approximations successives; les développements obtenus sont valables *autour* de chaque point du plan, même s'il est une singularité essentielle pour les intégrales, ce qui, théoriquement, rend possible l'étude de la partie caractéristique de cette singularité à l'aide du développement même. Un développement valable dans toute l'étoile d'une intégrale nous est d'ailleurs donné aussi par la méthode de Cauchy-Lipschitz ([1]).

On peut donc dire que l'équation de Volterra constitue une forme très avantageuse pour résoudre commodément un problème qui, dans

---

([1]) *Voir*, pour ces questions, le *Cours d'Analyse* de M. E. Picard, t. II, 2e édition, p. 340 et 351.

le cas général et dans le domaine actuel de l'Analyse, correspondrait à quelque chose de très compliqué. Il nous reste donc maintenant à montrer effectivement cette équivalence.

Cette équivalence ne se laisse pas voir intimement si l'on se borne aux variables réelles; c'est l'introduction de la variable complexe qui jette une vive lumière sur la question en montrant que la solution de l'équation de Volterra est dans le cas général une fonction *multiforme à une infinité de branches*. Ses singularités sont *fixes* en dehors de celles du second membre $F(x)$ et si le noyau est une fonction entière en x et s, ce sont les zéros de la fonction $f(x, x)$ qui sont les points critiques transcendants de la solution; ils forment ainsi un ensemble dénombrable. On peut encore énoncer ce résultat en disant que l'équation de Volterra a une infinité de solutions dans le domaine complexe et cela nous explique pourquoi nous devions trouver derrière elle une équation différentielle linéaire d'ordre infini.

2. Plaçons-nous dans le cas simple de

$$a_0(0) \neq 0$$

et dérivons $n+1$ fois l'équation

$$\int_0^x f(x,s)\,\varphi(s)\,ds = F(x). \tag{1}$$

Nous obtenons les relations

$$(2)\left\{\begin{array}{l} a_0(x)\,\varphi(x) - \displaystyle\int_0^x \Big[a_1(s) + \ldots \\ \qquad + a_n(s)\dfrac{(s-x)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots\Big]\varphi(s)\,ds = F'(x), \\ [a_0(x)\,\varphi(x)]' - [a_1(x)\,\varphi(x)] + \displaystyle\int_0^x [a_2(s) + \ldots]\,\varphi(s)\,ds = F''(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [a_0(x)\,\varphi(x)]^{(n)} - [a_1(x)\,\varphi(x)]^{(n-1)} + \ldots + (-1)^n[a_n(x)\,\varphi(x)] \\ \quad + \displaystyle\int_0^x \Big[a_{n+1}(s) + \ldots + a_{n+p}(s)\dfrac{(s-x)^{p-1}}{(p-1)!} + \ldots\Big]\varphi(s)\,ds = F^{(n+1)}(x), \end{array}\right.$$

en conservant les notations du n° 3 (Ire Partie).

Posons

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \left[a_{n+1}(s) + \ldots + a_{n+p}(s) \frac{(s-x)^{p-1}}{(p-1)!} + \ldots \right] \varphi(s) ds.$$

Nous cherchons les solutions de (12) finies et continues à l'origine; soient m le module maximum de $\varphi(x)$ dans un cercle suffisamment petit de rayon R autour de l'origine et m_k le module maximum de $a_k(s)$ dans le même domaine.

On aura donc dans tout ce cercle

$$|R_n(x)| < kmm_{n+1},$$

où l'on a

$$k = e^R - 1.$$

Or, nous supposons le noyau $f(x, s)$ être, pour toute valeur finie de s, une fonction entière en x d'ordre plus petit que 1 ([1]); elle sera du même ordre en $x - s = t$, pour toute valeur finie de s, car la croissance de la fonction $f(x, s)$ en x et celle de $f(s+t, s)$ en t sont évidemment les mêmes si s a une valeur finie quelconque.

Il en résulte

(3) $$\lim_{n=\infty} R_n(x) = km \lim_{n=\infty} m_{n+1} = 0.$$

Remarquons d'autre part que

(4) $$\lim_{n=\infty} F^{(n+1)}(x) = \Phi(x);$$

cette limite existant sûrement dans nos hypothèses, elle sera nulle si l'ordre de $F(x)$ est plus petit que 1.

Nous pouvons maintenant démontrer que toute solution de l'équation fonctionnelle (1) finie et continue à l'origine satisfait à l'équation

---

([1]) Cet ordre ainsi que celui de $F(x)$ peuvent aussi être égaux à 1; mais dans ce cas la croissance de ces fonctions doit être au plus égale à celle de e^x.

différentielle linéaire d'ordre infini

$$(5)\quad \begin{cases} \{[a_0(x)\varphi(x)]^{(n)} - [a_1(x)\varphi(x)]^{(n-1)} + \ldots \\ \qquad + (-1)^n [a_n(x)\varphi(x)]\}_{n=\infty} = \Phi(x), \end{cases}$$

obtenue en faisant, dans la dernière des relations (2), croître n indéfiniment. L'équation (5) est d'une forme tout à fait spéciale : l'indice du rang de ses termes augmente indéfiniment dans *les deux sens*, et nous verrons qu'elle correspond à un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre en nombre infini, ce qui n'est pas identique, comme dans le cas de l'ordre fini, avec une équation différentielle linéaire d'ordre infini proprement dite, c'est-à-dire avec une relation de la forme

$$a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + \ldots + a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \ldots = 0$$

entre toutes les dérivées d'une fonction et où l'indice du rang de ses termes augmente indéfiniment dans un *seul* sens.

Pour démontrer notre proposition, remarquons qu'en vertu des formules (3) et (4) on peut déterminer un nombre N suffisamment grand, de façon qu'on ait

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$|F^{(n+1)}(x) - \Phi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dans le cercle de rayon R pour toutes les valeurs de $n \geq N$, ε étant arbitrairement petit; nous aurons donc

$$\begin{aligned} &|[a_0(x)\varphi(x)]^{(n)} - [a_1(x)\varphi(x)]^{(n-1)} + \ldots \\ &\qquad + (-1)^n [a_n(x)\varphi(x)] - \Phi(x)| < \varepsilon \end{aligned}$$

pour toutes les valeurs de n plus grandes qu'un nombre N; mais ε est arbitrairement petit. Par conséquent le premier membre de l'équation tend vers $\Phi(x)$ pour $n = \infty$, ce qu'il fallait démontrer.

Inversement, faisons dans les relations (2) $x = 0$; si n croît indé-

finiment nous obtenons une infinité de relations linéaires entre les valeurs à l'origine de φ et de ses dérivées successives. Si nous désignons par $y_0, y_1, y_2, \ldots$ ces valeurs, ces relations seront :

$$(6)\quad \begin{cases} a_0 y_0 = \mathrm{F}'(0), \\ a_0 y_1 + (a'_0 - a_1) y_0 = \mathrm{F}''(0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_0 y_{n-1} + [(n-1)a'_0 - a_1] y_{n-2} \\ \qquad + \left[\dfrac{(n-1)(n-2)}{2} a''_0 - \dfrac{n-2}{1} a'_1 + a_2\right] y_{n-3} + \ldots \\ \qquad\qquad + (a_0^{(n-1)} - a_1^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}) y_0 = \mathrm{F}^{(n+1)}(0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

en posant $a_i^{(k)} = a_i^{(k)}(0)$. Puisque $a_0(0) \neq 0$, ces relations vont nous déterminer successivement les valeurs de $y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$.

Le fait de se donner seulement la valeur d'une fonction et de toutes ses dérivées successives à l'origine ne détermine nullement la fonction, de sorte que l'équation (1) n'équivaut pas aux relations (6) seulement; nous devons adjoindre l'équation différentielle (5), et il nous reste à démontrer qu'une solution finie et continue de (5) satisfaisant aux relations (6) vérifie l'équation fonctionnelle (1).

Pour cela nous partirons de l'équation différentielle

$$(7)\quad [a_0(x)\varphi(x)]^{(n)} + \ldots + (-1)^n [a_n(x)\varphi(x)] + \mathrm{S}_n(x) = \mathrm{F}^{(n+1)}_{(x)}.$$

Si l'on prend n suffisamment grand et si $\varphi(x)$ désigne une solution de l'équation différentielle (5), la fonction $\mathrm{S}_n(x)$ sera, en tenant compte de (3) et (4), aussi petite que nous le voulons dans un cercle autour de l'origine où la solution $\varphi(x)$ est finie et continue. En intégrant $n+1$ fois de suite nous obtenons, eu égard aux $n+1$ premières relations (6),

$$(8)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \left[a_0(s) + a_1(s)\frac{s-x}{1} + \ldots + a_n(s)\frac{(s-x)^n}{n!}\right]\varphi(s) \\ \qquad\qquad \displaystyle + \int_0^x \frac{(s-x)^n}{n!}\mathrm{S}_n(s)\,ds = \mathrm{F}(x), \end{cases}$$

ou en mettant $f(x, s)$ en évidence et posant

$$T_n(x, s) = a_{n+1}(s)\frac{s-x}{n+1} + \ldots + a_{n+p}(s)\frac{(s-x)^p}{(n+1)\ldots(n+p)} + \ldots,$$

$$\int_0^x f(x, s)\varphi(s)\,ds + \int_0^x \frac{(s-x)^n}{n!}[S_n(s) - T_n(x, s)]\varphi(s)\,ds = F(x).$$

Or cela est vrai quel que soit n, car *toutes* les relations (6) sont supposées satisfaites; d'autre part la seconde intégrale du premier membre est évidemment infiniment petite avec $\frac{1}{n}$. Si donc n croît indéfiniment nous aurons

$$\int_0^x f(x, s)\varphi(s)\,ds = F(x),$$

c'est-à-dire justement l'équation fonctionnelle cherchée.

3. L'équation différentielle linéaire d'ordre infini (5) ainsi obtenue peut être considérée comme l'adjointe de l'équation

$$(9) \qquad \left[a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x)y\right]_{n=\infty} = \Phi(x),$$

qui est évidemment du même type qu'elle, car les indices de ses termes augmentent aussi indéfiniment dans les deux sens. Or l'équation (9) est celle qu'on obtient lorsqu'on veut remplacer par une seule équation différentielle linéaire d'ordre infini le système d'équations différentielles linéaires du premier ordre en nombre infini :

$$a_0(x)\frac{dy_1}{dx} + a_1(x)y_1 + a_2(x)y_2 + \ldots + a_n(x)y_n + \ldots = 0,$$

$$(10) \qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{dy_2}{dx} = y_1, \\ \frac{dy_3}{dx} = y_2, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \frac{dy_n}{dx} = y_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

qui est exactement celui qui se rencontre dans la théorie des équations différentielles linéaires d'ordre fini, lorsqu'on veut transformer une pareille équation en un système d'équations différentielles du premier ordre.

Dans le cas de l'ordre infini il y a une certaine différence entre une équation différentielle linéaire d'ordre infini proprement dite et un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre en nombre infini. Appelons *système normal,* par analogie avec le cas de l'ordre fini, un système tel qu'il peut être résolu et d'une façon unique par rapport aux dérivées des fonctions inconnues. Prenons maintenant l'équation

$$a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + \ldots + a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \ldots = 0 \tag{11}$$

et le système (10) qui, par un choix convenable des notations, sont, dans le cas de l'ordre fini, réductibles l'une à l'autre. Si nous cherchons à transformer l'équation (11) dans un système tel que (10), nous obtenons un système de la forme

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = y_1, \\ &\frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ &\frac{dy_n}{dx} = y_{n+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et en plus une relation de la forme

$$a_0(x)y + a_1(x)y_1 + a_2(x)y_2 + \ldots = 0.$$

On peut, il est vrai, transformer cette dernière relation aussi dans une équation différentielle en remplaçant l'une quelconque des fonctions inconnues par sa valeur; mais, de quelque manière qu'on procède, nous n'obtiendrons jamais ainsi un système normal, car il y aura toujours deux équations donnant la dérivée d'une *même* fonction.

Le système (10) est donc un système normal, tandis que le système équivalent à (11) ne l'est pas.

4. L'équation de Volterra nous donne aussi le moyen de signaler une autre différence. Nous avons en effet démontré que si la fonction

$$(12) \qquad a_0(x) + a_1(x)t + \ldots + a_n(x)t^n + \ldots$$

est une fonction entière de t, d'ordre plus petit que 1, pour toute valeur finie de x, l'intégration de l'équation dont (9) est l'adjointe se réduit à la résolution d'une équation de Volterra.

Dans la démonstration que nous avons donnée au nº 3 nous devions tenir compte des relations (11), ce qui nous a ainsi conduit à une équation de Volterra, avec un second membre bien déterminé; maintenant on n'a plus à tenir compte d'aucune relation, ce qui nous conduira à un second membre représenté par une fonction arbitraire. Par conséquent, puisque nous ne voulons pas arriver à une équation de Volterra déterminée, la fonction $F(x)$ sera dans ce cas une fonction de la forme

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots,$$

les coefficients b_i étant arbitraires, de sorte que la solution de l'équation de Volterra donne ainsi la solution générale de l'équation (9) avec une infinité dénombrable de constantes arbitraires.

Si l'on applique la même méthode à une équation différentielle (11) proprement dite, il arrive que le noyau de l'équation de Volterra qu'on obtient dans une formule analogue à (8) est *nul*, car il est la limite vers laquelle tend le terme général d'une série qui résulte de la multiplication de deux séries uniformément et absolument convergentes dans tout le plan; on a fait toujours la même hypothèse sur la fonction (12). On n'obtient pas ainsi dans ce cas une équation de Volterra. Voici comment on peut développer les calculs :

Soit

$$(13) \qquad a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + \ldots + a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \ldots = 0$$

l'équation considérée. Par hypothèse la fonction

$$G(x, t) = a_0(x) + a_1(x)t + \ldots + a_n(x)t^n + \ldots$$

est une fonction entière en t d'ordre plus petit que 1 pour toute valeur finie de x [1].

Soit m_n le maximum de $|a_n(x)|$ sur la circonférence C décrite de l'origine comme centre et avec un rayon r de longueur arbitraire. La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_n t^n$$

est aussi une fonction entière de t d'ordre plus petit que 1; en effet, on a par hypothèse

$$\lim_{n=\infty} n^{\alpha} \sqrt[n]{|a_n(x)|} = \nu \qquad (\alpha > 1)$$

où α est une constante nécessairement et ν une fonction de x, indépendante de n, qui est partout finie à distance finie; on aura donc sur toute la circonférence C, quel que soit n,

$$n^{\alpha} \sqrt[n]{|a_n(x)|} < \mathrm{M},$$

M étant une constante, ce qui démontre la proposition.

Si nous considérons donc l'équation (13) et une de ses solutions analytiques, elle pourra être intégrée terme à terme. Faisons cela et par l'application de la formule d'intégration par parties généralisée, ordonnons par rapport aux dérivées de y; nous obtenons ainsi

$$\int_0^x \mathrm{F}_1[a_0(s)]\, y(s)\, ds + \mathrm{F}_1[a_1(x)]\, y + \mathrm{F}_1(a_2)\frac{dy}{dx} + \ldots + \mathrm{F}_1(a_n)\frac{d^n y}{dx^n} + \ldots = 0,$$

où l'on a posé

$$\mathrm{F}_1[a_n(x)] = a_n(x) - a'_{n+1}(x) + a''_{n+2}(x) + \ldots + (-1)^k a^{(k)}_{n+k}(x) + \ldots.$$

On a bien le droit d'ordonner les termes ainsi obtenus à volonté, car

(1) Cette hypothèse que nous faisons constamment sur la nature du noyau ou sur la fonction $G(x, t)$ paraît être intimement liée à l'étude des équations différentielles linéaires d'ordre infini au point de vue de leurs solutions analytiques, comme nous le ferons voir un peu plus loin.

la série double de leurs modules est convergente. En effet, on a

$$|a_n(x)| + |a'_{n+1}(x)| + \ldots + |a^{(k)}_{n+k}(x)| + \ldots$$
$$< \frac{m_n}{1 - \frac{x}{r}} + \frac{m_{n+1}}{r\left(1 - \frac{x}{r}\right)^2} + \ldots + \frac{m_{n+k}}{r^k\left(1 - \frac{x}{r}\right)^{k+1}} + \ldots,$$

et, pour n suffisamment grand,

$$|a_n(x)| + |a'_{n+1}(x)| + \ldots$$
$$< \frac{m_n}{1 - \frac{x}{r}} \left[1 + \frac{\varepsilon}{r\left(1 - \frac{x}{r}\right)} + \ldots + \frac{\varepsilon^k}{r^k\left(1 - \frac{x}{r}\right)^k} + \ldots\right],$$

ε étant arbitrairement petit.

Il en résulte

$$|a_k(x)| + \ldots + |a^{(k)}_{n+k}(x)| + \ldots < \frac{m_n}{r(r - x - \varepsilon)}.$$

On a donc en même temps *a fortiori*

$$|F_1[a_n(x)]| < \frac{m_n}{r(r - x - \varepsilon)}.$$

La série double formée par les modules des termes qui ont résulté de la première intégration converge donc comme

$$\sum_{n<0}^{\infty} m_n t^n,$$

ce qui justifie notre remarque et nous montre en même temps que nous nous trouvons exactement dans les mêmes conditions qu'au commencement; par suite, nous pourrons continuer cette opération indéfiniment. Une seconde intégration nous donne

$$\int_0^x \{F_1[a_0(s)](x - s) + F_2[a_1(s)]\}\, ds + F_2(a_2)y(x) + \ldots$$
$$+ F_2(a_{n+2})\frac{d^n y}{dx^n} + \ldots = b_1 x + b_2$$

en posant

$$F_2(a_n) = F_1 F_1(a_n) = F_1(a_n) - F_1'(a_{n+1}) + F_1''(a_{n+2}) + \ldots + (-1)^k F_1^{(k)}(a_{n+k}) + \ldots,$$

et ainsi de suite. Après $n+1$ intégrations, nous obtenons

$$\int_0^x \left\{ F_1[a_0(s)] \frac{(x-s)^n}{n!} + F_2[a_1(s)] \frac{(x-s)^{n-1}}{n-1!} + \ldots + F_n[n_{n-1}(s)] \right\} y(s)\,ds + F_n(a_n)y(x) + \ldots + F_n(a_{n+k}) \frac{d^k y}{dx^k} + \ldots = \frac{a_0 x^n}{n!} + \frac{a_1 x^{n-1}}{n-1!} + \ldots + a_n$$

en posant, d'une manière générale,

$$F_n(a_k) = F_1 F_{n-1}(a_k).$$

Il est maintenant facile de voir que le noyau de l'intégrale du premier membre tend uniformément vers zéro dans le cercle C lorsque n augmente indéfiniment; en effet, il est le terme général du produit des deux séries

$$1 + \frac{x-s}{1} + \frac{(x-s)^2}{2!} + \ldots + \frac{(x-s)^n}{n!} + \ldots$$

et

$$F_1[a_0(s)] + F_2[a_1(s)] + \ldots + F_n[a_{n-1}(s)] + \ldots$$

qui sont toutes les deux uniformément et absolument convergentes si s se trouve à l'intérieur du cercle C; sa limite pour $n = \infty$ est donc bien zéro. Nous n'obtenons donc pas par ce procédé une équation de Volterra, mais simplement une infinité de relations linéaires entre les valeurs *initiales* de toutes les dérivées d'une solution analytique quelconque que l'on peut démontrer aisément être de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{in} y_0^{(n)} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, \infty),$$

les constantes b_{in} étant telles que les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{in} t^n$$

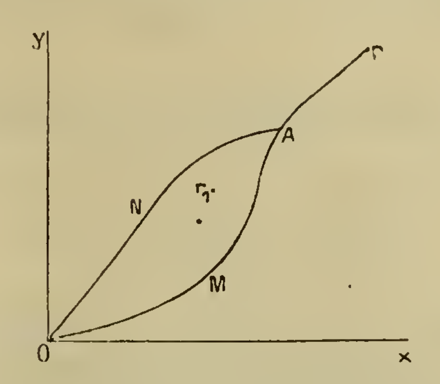
sont des fonctions entières de t d'ordre plus petit que *un*.

5. La solution de l'équation de Volterra avec un second membre bien déterminé est donc une fonction qui peut aussi être obtenue par l'intégration d'une équation différentielle linéaire d'ordre infini avec des conditions initiales qui la déterminent complètement. Une pareille fonction est évidemment une fonction multiforme à une infinité de branches dans le cas général, comme cela résulte d'une généralisation de la théorie des équations différentielles linéaires d'ordre fini pour une équation différentielle linéaire d'ordre infini qui a *effectivement* une infinité de solutions linéairement indépendantes. On peut retrouver ce caractère par l'étude *directe* de l'équation de Volterra, mais pour cela il faut introduire les variables complexes et considérer dès lors le chemin d'intégration qui figure dans l'expression (7) de la solution comme absolument quelconque. En effet le raisonnement fait au n° **1** de la première Partie peut s'étendre à tout chemin d'intégration qui ne passe par aucun des zéros de la fonction $f(x_1, x)$, supposée pour simplifier différente de zéro à l'origine, et par aucune des singularités de $F(x)$. Car sur un pareil chemin, toutes les approximations (5) sont bien déterminées et la formule (7) donne donc d'une façon précise la valeur de la solution pour tout point de ce chemin. Pour chaque chemin ainsi choisi, nous aurons une solution parfaitement déterminée en chacun de ses points par la formule (7) où le chemin d'intégration des intégrales est justement le chemin considéré; la fonction $\Pi(x, s)$ dépend aussi d'une manière évidente de ce chemin d'intégration.

La solution ainsi obtenue est *attachée* au chemin d'intégration considéré; pour un chemin donné à l'avance, comme par exemple l'axe positif Ox, elle est unique et bien déterminée. Mais faisons varier ce chemin en ayant soin d'éviter les zéros de $f(x, x)$ et les singularités de $F(x)$; si nous considérons deux chemins allant de l'origine à un point x et ne contenant à leur intérieur aucun zéro de $f(x, x)$ et aucune singularité de $F(x)$, la formule (7) montre clairement que la valeur de $\varphi(x)$ au point x sera la même si l'on y parvient par un chemin ou par l'autre [1].

[1] Si $f(o, o) = o$, nous avons vu qu'il y a une indétermination à un nombre fini de constantes linéaires, ce qui ne change évidemment rien aux résultats que nous avons en vue.

Mais prenons maintenant deux chemins entourant, par exemple, un seul zéro r_1 de $f(x, x)$; la différence des valeurs de $\varphi(x)$ qu'on obtient



pour un point de AP suivant qu'on y parvient par le chemin OMAP ou ONAP est égale à

$$\Phi_1(x) = \int_{C_1} \frac{\text{H}(x, s)\, \text{F}'(s)}{a_0(s)} ds,$$

C_1 étant un contour suffisamment petit pour entourer le seul zéro r_1.

Nous pouvons, sans restreindre la portée du raisonnement, supposer la fonction $\text{F}(x)$ entière, car les singularités de $\text{F}(x)$ ne se rattachent pas intimement à l'équation fonctionnelle; elles sont analogues aux singularités du second membre d'une équation différentielle linéaire d'ordre fini et elles peuvent d'ailleurs être traitées de la même manière que les zéros de $f(x, x)$.

Pour arriver à un point x, nous suivrons d'abord un chemin déterminé que nous désignerons par $\overline{\text{O}x}$; tout autre chemin pouvant se réduire à $\overline{\text{O}x}$ suivi d'un nombre de lacets décrits autour des points r_1, $r_2, \ldots, r_n, \ldots$, dans un ordre bien déterminé dépendant du chemin considéré, il résulte que la valeur de $\varphi(x)$ la plus générale sera égale à une valeur déterminée $\overline{\varphi(x)}$ augmentée d'un nombre quelconque de fonctions telles que

$$(13') \qquad \Phi_n(x) = \int_{C_n} \frac{\text{H}(x, s)\, \text{F}'(s)\, ds}{a_0(s)},$$

où C_n désigne un contour entourant le seul zéro r_n.

Il est à remarquer que, si l'on tourne autour du point r_n *deux* fois de suite, le résultat n'est pas égal à $2\Phi_n(x)$; cela tient à ce que la

fonction $\Pi(x, s)$ est elle-même une fonction multiforme admettant l'infinité dénombrable des zéros de $f(x, x) = a_0(x)$ comme points critiques transcendants, qui ne sont pas, par conséquent, de nature logarithmique.

Les fonctions (13') sont évidemment les solutions de l'équation fonctionnelle

$$\int_C f(x, s)\varphi(s)\,ds = 0, \tag{14}$$

où C désigne un contour quelconque indépendant de x.

Dans ses études sur les opérations distributives, M. Pincherle [1] désigne ces fonctions sous le nom de *racines de l'opération distributive* (14). Elles correspondent à ce que Liouville [2], dans son calcul des dérivées à indices fonctionnaires, appelait les *fonctions complémentaires.*

6. La théorie des équations différentielles linéaires d'ordre fini fournit une application intéressante de ces considérations. Prenons l'équation différentielle linéaire d'ordre n écrite, en divisant par le coefficient de la dérivée d'ordre n, sous la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x)y = 0. \tag{15}$$

Elle peut aussi s'écrire, en désignant par $b_1(x), \ldots, b_n(x)$ les coefficients de l'équation adjointe, de la façon suivante :

$$\frac{d^n y}{dx^n} - \frac{d^{n-1} b_1 y}{dx^{n-1}} + \ldots + (-1)^n b_n(x)y = 0.$$

Appliquons à cette dernière équation la marche suivie au n° 5 (II); nous obtenons immédiatement l'équation de Volterra équivalente

$$\varphi(x) + \int_0^x f(x, s)\varphi(s)\,ds = P_{n-1}(x), \tag{16}$$

---

(1) S. PINCHERLE et O. AMALDI, *Le operationi distributive e le loro applicazioni all analisi*, Bologna, 1901.

(2) J. LIOUVILLE, *Sur les fonctions complémentaires* (*Journal de Crelle*, t. **11**, 1834, p. 1).

$P_{n-1}(x)$ désignant un polynome arbitraire de degré $n-1$, et [1]

$$f(x, s) = b_1(\xi) - b_2(\xi)\frac{(x-\xi)}{1} + \ldots + (-1)^{n-1} b_n(\xi)\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Remarquons qu'on peut écrire le noyau aussi sous la forme

$$(n-1)!\,f(x, s) = [a_1(\xi)(x-\xi)^{n-1}]^{(n)} - [a_2(\xi)(x-\xi)^{n-1}]^{(n-1)} + \ldots \\ + (-1)^{n-1} a_n(\xi)(x-\xi)^{n-1},$$

les dérivations étant faites par rapport à la variable ξ.

Nous avons ainsi une équation de Volterra d'un type bien déterminé, dont le noyau est un polynome de degré $n-1$ par rapport à la variable x et dont le second membre est un polynome de degré $n-1$ avec n coefficients arbitraires.

L'origine a été choisie comme limite inférieure d'intégration, mais il est clair que tout autre point peut être choisi à sa place. La formule [(7), I] donne la solution générale et nous avons ainsi un développement donné par les approximations successives qui est valable dans tout le domaine d'existence de la solution. Cette propriété remarquable de la méthode des approximations successives de fournir pour les équations différentielles linéaires un développement valable dans tout le plan a été donnée par Cauchy [2]; une étude plus détaillée à ce point de vue, mais par une méthode différente à celle que nous venons d'indiquer, a été faite par MM. Picard [3], Fuchs [4] et Poincaré [5].

La formule (7) est un instrument commode pour l'étude théorique des équations différentielles linéaires. On peut retrouver les résultats classiques de la théorie des équations différentielles linéaires en se plaçant systématiquement à ce point de vue.

---

(1) On a, comme c'est bien connu,

$$b_k = a_{k+1} - c_{n-k}^1 a'_k + \ldots + (-1)^k c_{n-1}^k a_1^{(k)}.$$

(2) *Œuvres complètes,* 1re série, t. V, p. 394.

(3) E. Picard, *Cours d'Analyse,* t. II.

(4) Fuchs, *Journal de Crelle,* t. 66, p. 125, 131, 140.

(5) Poincaré, *Acta mathematica,* t. IV, 1884, p. 214.

Remarquons d'ailleurs que le cercle vicieux qui résulterait du fait que nous nous sommes servi dans ce travail justement de la théorie des équations différentielles linéaires pour établir certains résultats sur l'équation de Volterra n'est qu'apparent; l'équation de Volterra (16), à laquelle nous avons réduit l'étude d'une équation différentielle linéaire, est en effet du type simple qui peut être traité directement, sans aucun artifice, par la méthode des approximations successives.

7. Dans tout ce qui précède, nous avons considéré seulement le cas des fonctions analytiques, à cause des variables complexes. Mais il est évident que, dans un domaine plus restreint, par exemple sur l'axe des variables réelles, l'hypothèse sur l'analycité des données n'est pas indispensable; il suffit d'admettre la continuité des données (noyau et second membre) seulement sur la portion d'axe qui est à considérer. Dans le cas traité au n° 5, l'existence d'un certain nombre des dérivées est nécessaire; or cette hypothèse est identique à celle que M. Volterra fait en se donnant *a priori* la forme nécessaire du noyau et du second membre dans ce cas. Il résulte de là que la méthode que nous avons donnée a le même degré de généralité que celle de M. Volterra et qu'en général, dans le cas des variables réelles, pour tous les problèmes traités dans ce travail, on peut remplacer l'hypothèse de l'analycité des fonctions données par celle de leur continuité et l'existence des dérivées qui interviennent dans les démonstrations.

8. L'hypothèse que nous avons faite relativement à l'ordre du noyau de l'équation de Volterra, et qui nous a permis d'arriver facilement à un type spécial d'équations différentielles linéaires d'ordre infini, paraît être intimement liée à ces questions et devoir jouer un rôle important dans la théorie des équations différentielles linéaires d'ordre infini.

C'est ce que nous voulons montrer dans ce numéro.

Prenons en effet une équation différentielle linéaire d'ordre infini proprement dite

$$(1) \qquad F(y) = a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + \ldots + a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + \ldots = 0.$$

Nous appellerons la fonction

$$G(x, s) = a_0(x) + a_1(x)s + \ldots + a_n(x)s^n + \ldots$$

la fonction génératrice de l'équation différentielle précédente.

Cherchons les solutions analytiques de $F(y) = 0$; par hypothèse, les coefficients $a_i(x)$ sont des fonctions analytiques uniformes. Soit x_0 un point où une solution analytique de (1) est régulière et supposons que le rayon r_{x_0} du cercle de convergence en ce point est *fini*. La série (1) étant convergente, nous aurons

$$\sqrt[n]{|a_n(x_0)|\,|y^{(n)}(x_0)|} < k \qquad (k > 1)$$

pour n suffisamment grand; on en tire

$$(2) \qquad n\sqrt[n]{|a_n(x_0)|}\sqrt[n]{\frac{|y^{(n)}(x_0)|}{n!}} < ke.$$

Si la limite de $\sqrt[n]{\frac{|y^{(n)}(x_0)|}{n!}}$ pour $n = \infty$ est unique et bien déterminée, on sait qu'on a

$$\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{\frac{|y^{(n)}(x_0)|}{n!}} = \frac{1}{r_{x_0}}.$$

Dans les autres cas $\frac{1}{r_{x_0}}$ est la plus grande des limites de l'expression précédente; par conséquent, il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles

$$(3) \qquad \left|\sqrt[n]{\frac{|y^{(n)}(x_0)|}{n!}} - \frac{1}{r_{x_0}}\right| < \varepsilon,$$

ε étant arbitrairement petit et n suffisamment grand.

Dans le premier cas, on déduit de (2)

$$(4) \qquad n\sqrt[n]{|a_n(x_0)|} < A \qquad (A > ker_{x_0}),$$

c'est-à-dire la fonction génératrice $G(s, t)$ est une fonction entière de t d'ordre $\leqq 1$ pour toutes les valeurs de x pour lesquelles y est holomorphe. Dans le second, l'inégalité (4) est vraie pour toutes les

valeurs de n telles que

$$\sqrt[n]{\frac{|y^{(n)}(x_0)|}{n!}} > a \qquad (a \neq 0),$$

a étant une constante positive. Dans ce cas la fonction $G(x, t)$ aura une infinité de termes dont la décroissance est analogue à ceux d'une fonction entière d'ordre plus petit ou égal à un, pour toutes les valeurs de x pour lesquelles y est holomorphe. Si donc nous considérons l'ensemble E des points où cette condition n'est pas satisfaite, il sera formé en général par les singularités des solutions analytiques; mais si, en prenant une solution analytique déterminée, l'ensemble de ses singularités est une partie de E seulement, il faudra conclure que le reste constitue un ensemble de points où la solution analytique considérée ne satisfait plus à l'équation (1). Cette circonstance peut bien se présenter, comme le montre l'exemple suivant.

Prenons l'équation différentielle

$$(5) \qquad (1 - x)y + \frac{dy}{dx} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{dy^n}{dx^n} + \ldots = 0.$$

La fonction $\Gamma(x)$ satisfait bien à cette équation dans toute la région du plan située à l'extérieur des cercles de rayon 1 décrits des points 0, -1, -2, ..., $-n$, ... comme centres. En effet, pour un pareil point, on a, en posant $y = f(x)$,

$$y + \frac{dy}{dx} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{d^n y}{dx^n} + \ldots = f(x + 1),$$

et par conséquent l'équation différentielle (2) revient à l'équation fonctionnelle

$$f(x + 1) = xf(x).$$

Mais, dans un point situé à l'intérieur d'un des cercles précédents, le développement $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^n y}{dx^n}$ est évidemment divergent, tandis que le produit $xf(x)$ est partout fini sauf aux centres. L'équation différentielle n'y est donc plus satisfaite.

Cette circonstance est nouvelle et caractéristique aux équations différentielles linéaires d'ordre infini. Il n'est donc pas suffisant de s'assurer qu'une fonction analytique non entière satisfait à une équation différentielle linéaire d'ordre infini dans un point pour en conclure qu'elle y satisfait dans tout son domaine d'existence. Il faudra analyser à part les points x du plan pour lesquels la fonction génératrice *est une fonction entière d'ordre* >1. S'il existe des pareils points qui soient réguliers pour une solution analytique, celle-ci n'y satisfera certainement plus à l'équation considérée.

Nous appellerons une pareille solution une solution *impropre*, car elle ne présente pas le caractère essentiel d'une solution analytique de satisfaire à l'équation différentielle dans tout son domaine d'existence.

Nous pouvons alors énoncer le résultat précédent sous la forme suivante :

Pour qu'une solution analytique non entière de l'équation (1) *ne soit pas impropre, il faut que chaque point x pour lequel la fonction génératrice n'est pas une fonction entière de s d'ordre* $\leqq 1$ *soit nécessairement un point singulier de y.*

Cette condition nécessaire n'est pas suffisante. En effet, supposons que la fonction $G(x, s)$ est, quel que soit x, une fonction entière de s d'ordre $\leqq 1$. Dans ce cas, les solutions analytiques de (1) ne sont pas nécessairement propres; dans l'exemple précédent, par exemple, on a

$$G(x, s) = e^s - x,$$

qui est bien d'ordre 1 en s pour toute valeur finie de x, et pourtant l'équation différentielle (2) a une solution impropre $\Gamma(x)$. Il est facile d'analyser cet exemple. En effet, la condition de convergence peut s'écrire

$$\sqrt[n]{\frac{n!}{|y^{(n)}(x_0)|}} > k$$

pour n suffisamment grand, k étant un nombre positif plus grand mais aussi près qu'on veut de l'unité.

Or le premier membre de cette inégalité s'approche autant que nous le voulons du rayon de convergence au point x_0. Si donc l'équation (5) a une solution non entière, elle ne pourra plus satisfaire à cette équation

pour les points dont la distance au point régulier est plus petite que 1; c'est ce qui arrive pour la fonction $\Gamma(x)$ et de même pour toute solution de (5) ayant au moins un point singulier. *Les solutions propres de* (2) *sont donc seulement les fonctions entières.*

Passons au cas général; nous avons trouvé

$$\lim_{n=8} \frac{n}{e} \sqrt[n]{|a_n(x_0)|} \sqrt[n]{\frac{|y^{(n)}(x_0)|}{n!}} < k$$

qui peut s'écrire (¹)

$$ker_{x_0} > \lim_{n=\infty} n \sqrt[n]{|a_n(x_0)|}.$$

Si l'ordre de la fonction $G(x_0, s)$ est plus petit que 1, le second membre sera nul et la condition précédente est certainement satisfaite dans tout point non singulier. Nous pouvons donc dire :

Si une équation différentielle linéaire d'ordre infini a une fonction génératrice entière d'ordre plus petit que 1 *en* s *pour toute valeur finie de* x, *toutes ses solutions analytiques seront propres.*

Supposons maintenant l'ordre de $G(x_0, s)$ plus grand que l'unité. Dans ces conditions, le second membre de l'inégalité précédente sera infini; il est donc nécessaire que $r_{x_0} = \infty$. Par conséquent :

Si la fonction génératrice est une fonction entière de t d'ordre plus grand que 1 au moins pour une valeur x_0 de x, l'équation différentielle considérée ne peut avoir comme solutions analytiques propres que des fonctions entières.

Supposons enfin l'ordre égal à 1. Si l'ordre n'est pas bien défini, $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n(x_0)|}$ sera égale à 0 ou à ∞; nous aurons donc l'un des deux cas précédemment étudiés. Supposons donc l'ordre bien défini; on aura alors

$$r_{x_0} > A.$$

La solution analytique est impropre si elle a comme point singulier le point x_0. Donc :

(¹) Au moins pour les valeurs de n pour lesquelles l'inégalité (3) a lieu.

Si l'ordre de la fonction génératrice est égal à 1 pour toute valeur de x, les seules solutions propres sont aussi les fonctions entières.

Analysons de plus près le cas où l'ordre est plus grand que l'unité; soit ν cet ordre bien défini. Nous aurons

$$\lim_{n=\infty} n^{\frac{1}{\nu}} \sqrt[n]{|a_n(x)|} = k.$$

En général ν et k sont des fonctions analytiques de x; prenons par exemple

$$a_n(x) = \frac{f(x)^n}{n^{nx}},$$

nous avons

$$\frac{1}{\nu} = x \qquad \text{et} \qquad k = f(x).$$

Si ν ou c restent finies, aussi grand que soit x, elles se réduiront à des constantes; si elles sont donc réellement variables avec x, elles croîtront indéfiniment autour d'un point au moins du plan x.

On a d'autre part

$$\lim_{n=\infty} n \sqrt[n]{|a_n(x)|} \sqrt{\frac{|y^{(n)}(x)|}{n!}} < ke$$

et, par conséquent,

$$n^{\frac{\nu-1}{\nu}} \sqrt[n]{\frac{|y^{(n)}(x)|}{n!}} < \frac{e}{k}.$$

Nous devons donc avoir

$$\mu \leqq \frac{\nu}{\nu - 1},$$

μ désignant l'ordre de la solution analytique $y(x)$ qui, nous le savons, doit être une fonction entière. On en déduit

$$\nu \leqq \frac{\mu}{\mu - 1}.$$

Or μ est un nombre fixe. La dernière inégalité ne peut être satisfaite que dans une partie du plan si ν n'est pas constant; le reste devrait donc contenir les singularités de la solution ou constituer une région dans laquelle la solution ne satisfait plus à l'équation. Comme

y est une fonction entière, la dernière hypothèse est la seule vraie. Il résulte de là que, si ν dépend de x, toutes les solutions analytiques de l'équation différentielle sont impropres.

Enfin, si ν est constant, l'équation différentielle n'admet pour solutions analytiques (si elles existent) que des fonctions entières d'un ordre déterminé, au plus égal à $\frac{\nu}{\nu - 1}$. Ces solutions sont propres.

En résumé, *le seul cas où la condition de convergence n'impose nulle condition aux solutions analytiques d'une équation différentielle linéaire d'ordre infini est celui où l'ordre de sa fonction génératrice est plus petit que* 1 ; dans ce cas l'ordre est constant.

Si l'ordre est constant et plus grand ou égal à l'unité, pour qu'une solution analytique soit solution de l'équation, il faut qu'elle soit une fonction entière d'ordre déterminé.

Si l'ordre dépend de x, toutes les solutions analytiques seront impropres.

Ce résultat nous montre clairement le rôle important que joue l'ordre de la fonction génératrice, qui, dans le cas de l'équation de Volterra, correspond à l'ordre du noyau.

Relativement aux solutions impropres, nous ferons encore la remarque suivante :

Elles admettent, en général, des singularités *mobiles* qui ne peuvent pas être lues sur l'équation différentielle elle-même. Par exemple, la fonction $\Gamma(x)$ solution impropre de (2) admet comme singularités les pôles du premier ordre $0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots$. D'ailleurs, la solution générale de l'équation fonctionnelle

$$f(x+1) = x f(x)$$

est évidemment

$$\Gamma(x) \mathrm{P}(x),$$

$\mathrm{P}(x)$ désignant une fonction quelconque admettant la période 1. Si donc nous prenons pour $\mathrm{P}(x)$ une fonction analytique de période 1 étant singulière dans un point quelconque α, nous obtiendrons en $\Gamma(x)\mathrm{P}(x)$ une solution impropre de l'équation (2) admettant la singularité arbitraire α.

Les solutions impropres s'éloignent donc complètement par leurs propriétés de celles des équations différentielles linéaires d'ordre fini.

9. On peut retrouver les résultats concernant l'équation (5) par une méthode directe, car l'équation (2) peut s'intégrer directement en lui appliquant la transformation bien connue de Laplace

$$y = \int_C e^{xt} z(t)\, dt.$$

Prenons l'équation plus générale

$$\text{(3)} \qquad P_0 y + P_1 \frac{dy}{dx} + \ldots + P_n \frac{d^n y}{dx^n} + \ldots = 0,$$

où P_i désignent des polynomes de x dont le degré est $\leqq p$.

En posant

$$y = \int_C e^{xt} z(t)\, dt,$$

où C est un contour indépendant de la variable x, nous avons

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \int_C e^{xt} t^n z(t)\, dt.$$

Donc, si y est une solution, nous devons avoir

$$\text{(4)} \qquad \int_C e^{xt}(P_0 + P_1 t + \ldots + P_n t^n + \ldots) z(t)\, dt = 0.$$

Soit

$$P_n(x) = a_{n0} + a_{n1} x + \ldots + a_{np} x^p$$

et ordonnons la parenthèse suivant les puissances de x; nous obtenons

$$\text{(5)} \qquad Q_0 + Q_1 x + Q_2 x^2 + \ldots + Q_p x^p,$$

en posant

$$Q_i = a_{0i} + a_{1i} t + \ldots + a_{ni} t^n + \ldots.$$

Supposons que les séries Q_i représentent des fonctions entières de t;

on peut alors remplacer la parenthèse de (4) par le polynome (5), ce qui nous donne

$$\int_C e^{xt}(Q_0 + Q_1 x + \ldots + Q_p x^p)\, z(t)\, dt = 0.$$

Mais

$$\int_C x^i Q_i e^{xt} z(t)\, dt = \int_C Q_i z(t) \frac{d^i}{dt^i} e^{xt}\, dt$$
$$= \left[\sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k \frac{d^k Q_i z}{dt^k} \frac{d^{i-k-1} e^{xt}}{dt^{i-k-1}} \right]_C + (-1)^i \int_C e^{xt} \frac{d^i Q_i z}{dt^i}\, dt.$$

Par conséquent

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_C e^{xt}(Q_0 + Q_1 x + \ldots + Q_p x^p)\, z(t)\, dt \\ & \quad = \left[\sum_{i=1}^{p} \sum_{k \leqq i-1} (-1)^k \frac{d^k Q_i z}{dt^k} \frac{d^{i-k-1} e^{xt}}{dt^{i-k-1}} \right] \\ & \qquad + \int_C e^{xt} \left[Q_0 z - \frac{dQ_1 z}{dt} + \ldots + (-1)^p \frac{d^p Q_p z}{dt^p} \right] dt = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour que l'intégrale $\int_C e^{xt} z(t)\, dt$ soit une solution de l'équation, il faut donc et il suffit que la fonction inconnue $z(t)$ satisfasse à l'équation différentielle

$$\frac{d^p Q_p z}{dt^p} - \frac{d^{p-1} Q_{p-1} z}{dt^{p-1}} + \ldots + (-1)^p Q_0 z = 0,$$

et que le contour C soit choisi de manière que la parenthèse du second membre de (6) soit nulle quelle que soit x. Cette question demande un théorème relatif à la croissance des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre fini dont les coefficients sont des fonctions entières de x, analogue à celui qui domine les travaux de M. Poincaré dans le cas où les coefficients sont seulement des polynomes en x.

Dans le cas particulier de l'équation (2) on a immédiatement

$$Q_0 = e^t, \qquad Q_1 = -1.$$

Pour que l'expression

$$\int_C e^{xt} z(t)\, dt$$

satisfasse à (2) il faut donc d'abord que z soit une solution de l'équation

$$\frac{dz}{dt} + e^t z = 0,$$

ce qui nous donne

$$z = C e^{-e}.$$

En faisant le changement de variables $e^t = u$, nous avons la solution

$$y = \int_C u^{x-1} e^{-u}\, du,$$

avec la condition

(7) $$(u^x e^{-u})_C = 0.$$

La condition (7) nous montre immédiatement que le contour C ne peut être situé tout entier à distance finie. La seule racine en u indépendante de x de l'équation transcendante

(8) $$u^x e^{-u} = 0$$

est $\Re u = +\infty$. Nous prendrons le contour C, partant du point $+\infty$, retournant plusieurs fois autour de l'origine et revenant au point $+\infty$.

Nous obtenons ainsi, dans le cas d'un seul tour autour de l'origine, la solution

$$\int_C u^{x-1} e^{-u}\, du = (e^{2\pi i x} - 1)\Gamma(x),$$

et, en général, si l'on fait n tours autour de l'origine,

$$(e^{2\pi i n x} - 1)\Gamma(x).$$

Ce sont toutes des *fonctions entières,* ce qui concorde avec les

recherches précédentes. Nous obtenons ainsi une infinité dénombrable de solutions linéairement indépendantes et qui sont toutes propres.

En limitant le domaine de x, au domaine réel et positif, par exemple, $u = o$ est une nouvelle racine de (8) et nous obtenons ainsi l'expression bien connue de $\Gamma(x)$

$$\int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du,$$

solution qui sera impropre.

Sur l'approximation des fonctions de grands nombres;

Par M. Maurice HAMY.

Je me suis attaché, dans le présent travail, à généraliser la méthode de M. Darboux ([1]) concernant la recherche des expressions asymptotiques des fonctions d'un nombre n très élevé, c'est-à-dire des expressions dont le rapport à ces fonctions tend vers l'unité, lorsque n croît indéfiniment, et qui donnent leurs valeurs numériques, avec de faibles erreurs relatives, pour n assez grand. J'ai été conduit à m'occuper de ce sujet à l'occasion de mes travaux sur le développement approché de la fonction perturbatrice, qui nécessitaient l'étude préalable de diverses questions demeurées en dehors du Mémoire de M. Darboux.

Partant d'un théorème d'Ossian Bonnet, sur les séries trigonométriques, M. Darboux a montré que la détermination des expressions asymptotiques des termes éloignés du développement d'une fonction $\Phi(z)$, par la série de Mac Laurin, est intimement liée à la connaissance des points singuliers de $\Phi(z)$ situés sur le cercle de convergence. Il a établi la marche à suivre pour obtenir ces expressions, lorsque le développement de $\Phi(z)$ est algébrique dans le voisinage des points singuliers dont il s'agit.

M. Flamme ([2]) a étendu la méthode de M. Darboux aux coefficients

---

([1]) *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 1878 : Darboux, *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres.*

([2]) Flamme, *Thèse de doctorat,* Paris, Gauthier-Villars, 1887.

de la série de Laurent et plus généralement aux intégrales de la forme

$$I = \int \Phi(z) \frac{dz}{z^{n+1}},$$

dans laquelle n désigne un entier positif très grand ([1]), lorsque la fonction $\Phi(z)$ possède un ou plusieurs points singuliers séparés de l'origine par le contour d'intégration, les extrémités de ce contour étant, en outre, plus éloignées de l'origine des coordonnées que l'un au moins de ces points singuliers.

Prenant un point de départ différent du théorème d'Ossian Bonnet, dans mes recherches, je me suis d'abord occupé de déterminer l'expression asymptotique de l'intégrale I : 1° en m'affranchissant de la restriction que n est entier; 2° en examinant toutes les positions que le contour peut présenter par rapport à l'origine des coordonnées. J'envisage notamment l'hypothèse où l'une des extrémités du contour d'intégration est plus rapprochée de l'origine que ses autres parties. J'obtiens, du reste, l'expression asymptotique de l'intégrale I, non seulement lorsque le développement de $\Phi(z)$ est algébrique dans le voisinage du point du plan dont la considération est nécessaire, pour l'évaluation approchée de cette intégrale, mais encore lorsque ce développement contient des termes de la forme $(z-a)^{\alpha} \log^{q}(z-a)$, q étant un entier positif.

J'aborde ensuite un autre problème plus général, relatif à la détermination de l'expression asymptotique de l'intégrale

$$J = \int f(z) \varphi^{n}(z)\, dz,$$

n étant un grand nombre quelconque.

On sait que Laplace a résolu ce problème ([2]), par une méthode d'ailleurs sujette à critiques, dans le cas où la variable z est réelle, en admettant que le champ d'intégration renferme une racine $z = c$

([1]) Le cas où n est négatif se ramène à celui dont il est question en changeant z en $\frac{1}{z}$.

([2]) *Calcul des probabilités.*

de $\varphi'(z)$ correspondant à un maximum absolu de $\varphi(z)$ dans ce champ et ne coïncidant pas avec une des limites de l'intégrale. Il a, en outre, supposé $\varphi(z)$ holomorphe dans le voisinage de $z = c$.

M. Darboux a confirmé le résultat de Laplace et l'a étendu aux intégrales dont l'élément différentiel dépend d'une variable complexe, lorsqu'à la racine $z = c$ de $\varphi'(z)$ correspond un maximum de $|\varphi(z)|$ absolu le long du contour d'intégration.

Le problème ainsi posé rentre dans une question plus générale que j'ai étudiée dans mon Mémoire et dont l'examen comprend deux cas tout à fait distincts.

Admettons d'abord que la plus grande valeur de $|\varphi(z)|$, le long du chemin d'intégration, corresponde à l'une des extrémités $z = c$ de ce contour, après l'avoir convenablement déformé, s'il est nécessaire.

Dans ces conditions, on peut toujours obtenir la valeur asymptotique de l'intégrale J, si les développements de $f(z)$ et de $\varphi(z)$, dans le voisinage de $z = c$, peuvent se mettre sous la forme

$$f(z) = B_1(z-c)^{\beta_1}\log^{q_1}(z-c) + B_2(z-c)^{\beta_2}\log^{q_2}(z-c) + \ldots,$$
$$\varphi(z) = \varphi(c) + A_1(z-c)^{\alpha_1} + A_2(z-c)^{\alpha_2} + \ldots,$$

les α désignant des nombres positifs, les q des entiers positifs ou nuls et les β des quantités supérieures à -1.

Si $|\varphi(z)|$ ne prend pas sa plus grande valeur à une extrémité du contour d'intégration, imaginons qu'on puisse remplacer le contour C, le long duquel est prise l'intégrale J, par un autre chemin C_1, passant par un point d'affixe $z = c$, jouissant des propriétés suivantes : 1° si le chemin C_1 n'est pas équivalent au contour C, il le devient en le déformant infiniment peu dans le voisinage du point $z = c$; 2° la plus grande valeur de $|\varphi(z)|$ le long du chemin C_1 est $|\varphi(c)|$. Il arrive alors, sauf quelques exceptions, que la considération du point $z = c$ conduit à la détermination de l'expression asymptotique de J. On suppose que le développement de $f(z)$ et de $\varphi(z)$, dans le voisinage du point c, rentre dans la même forme que précédemment, les β n'étant plus assujettis à être supérieurs à -1.

Les exceptions comprennent le cas où $f(z)$ et $\varphi(z)$ sont holomorphes dans le voisinage du point $z = c$, sans que $\varphi'(c)$ soit nul.

J'ai dit que le cas où $|\varphi(z)|$ prend sa plus grande valeur à une extrémité du contour d'intégration est à distinguer de celui où ce module prend sa plus grande valeur le long de ce contour. Par exemple, en faisant l'hypothèse que le point $z = c$ ne coïncide pas avec une extrémité du contour d'intégration, M. Darboux a obtenu la valeur asymptotique de J en supposant $\varphi(z)$ et $f(z)$ holomorphes dans le voisinage du point $z = c$, $|\varphi(z)|$ maximum absolu pour $z = c$, le long de ce contour, et $\varphi'(c) = 0$. Il a trouvé, dans ces conditions, que le développement de l'expression asymptotique de J, suivant les puissances descendantes de n, procède suivant une suite de termes tels que le rapport de l'un d'eux au précédent contient en facteur $\frac{1}{n}\cdot$ Or, j'établis dans mon travail que ce rapport contient en facteur $\frac{1}{\sqrt{n}}$ lorsque le point c coïncide avec une des limites de l'intégrale [1].

Dans le but de ne pas allonger outre mesure le présent Mémoire, je me suis contenté d'établir des formules générales sans les appliquer à des exemples particuliers. Les commentaires dont elles sont accompagnées comblent, je pense, suffisamment cette lacune pour qu'il ne puisse en résulter aucune difficulté dans leur emploi [2].

J'ai également laissé complètement de côté l'étude des intégrales doubles dont l'élément différentiel contient des facteurs élevés à de hautes puissances. On consultera avec fruit les recherches de M. Poincaré sur ce sujet [3].

---

(1) Les résultats contenus dans le présent Mémoire ont déjà été énoncés partiellement dans quelques-unes de mes publications antérieures : *Sur l'approximation des fonctions de grands nombres* (*Comptes rendus*, 1892, 1er semestre, et 1897, 2e semestre), *Sur le développement approché de la fonction perturbatrice dans le cas des inégalités d'ordre élevé* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1894, p. 393 à 405).

(2) *Voir* au sujet de l'application de la méthode de M. Darboux : DARBOUX, *loc. cit.*; FLAMME, *loc. cit.*; POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, p. 282; HAMY, *Bulletin astronomique*, 1893, et *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1894 et 1896; HADAMARD, *Sur les fonctions données par leur développement de Taylor* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1893); COCULESCO, *Thèse de doctorat*, Paris, Gauthier-Villars, 1895; FÉRAUD, *Thèse de doctorat*, Paris, Gauthier-Villars, 1897.

(3) *Loc. cit.*, p. 280.

Le présent Mémoire est divisé de la façon suivante :

§ I.

1. Définitions d'un contour de première, de deuxième et de troisième espèce par rapport à un point. — **2**. Propriétés des intégrales de la forme $\int \Phi(z)\frac{dz}{z^{n+1}}$ prises le long d'un contour de deuxième espèce. Théorème I.

§ II.

3. Lemmes préliminaires relatifs à l'étude des intégrales de la forme $\int \Phi(z)\frac{dz}{z^{n+1}}$, prises le long d'un contour de troisième espèce. **4**. Propriétés de ces intégrales. Théorème II. — **5**. Évaluation approchée de ces intégrales pour n très grand.

§ III.

6. Lemmes préliminaires relatifs à l'étude des intégrales de la forme $\int \Phi(z)\frac{dz}{z^{n+1}}$, prises le long d'un contour de première espèce. — **7**. Propriétés de ces intégrales. Théorème III. — **8**. Évaluation approchée de ces intégrales pour n très grand. — **9**. Généralisation de la règle. — **10**. Cas particulier lorsque n est entier. Évaluation de termes éloignés du développement d'une fonction par la série de Mac Laurin. Méthode de M. Darboux.

§ IV.

11. Variations du module d'une fonction autour d'un point. — **12**. Évaluation approchée de l'intégrale $I = \int f(u)\varphi^n(u)\,du$, pour n très grand, lorsque, $u = c$ désignant l'affixe de l'une des extrémités du contour d'intégration, on a $|\varphi(c)| > |\varphi(u)|$ pour tous les points de ce

contour : 1° cas où f et φ sont holomorphes dans le voisinage de $u = c$ en même temps que $\varphi'(c) = 0$; 2° cas où le point $u = c$ est un point singulier algébrique de f et φ; 3° cas particulier. — **13.** Évaluation approchée de I, pour n très grand, lorsque $|\varphi(u)|$ prend sa plus grande valeur en un point $u = c$ du contour d'intégration, ne coïncidant pas avec l'une des extrémités de ce contour. Examen de différents cas.

§ V.

14. Généralisation du théorème II concernant les intégrales de la forme $\int \Phi(z) \frac{dz}{z^{n+1}}$ prises le long d'un contour de troisième espèce, et conséquences relatives à leur évaluation approchée pour n très grand. — **15.** Généralisation du théorème III concernant les mêmes intégrales prises le long d'un contour de première espèce, et conséquences relatives à leur évaluation approchée pour n très grand.

§ VI.

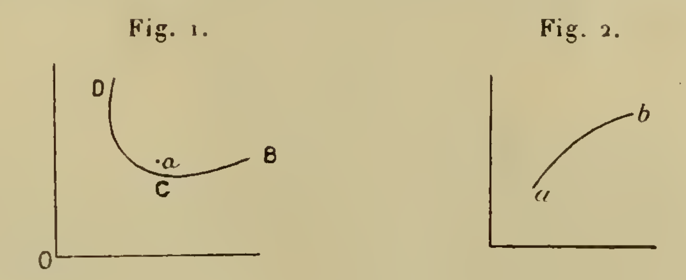
16. Généralisation des résultats obtenus, en ce qui concerne l'évaluation approchée de l'intégrale $\int f(u)\,\varphi^n(u)\,du$, lorsque $|\varphi(u)|$ prend sa plus grande valeur, le long du contour d'intégration, en un point coïncidant avec l'une de ses extrémités. — **17.** Même question lorsque $|\varphi(u)|$ prend sa plus grande valeur, le long du contour d'intégration, en un point qui ne coïncide pas avec l'une des extrémités.

§ I.

Des intégrales de la forme $\int \Phi(z)\frac{dz}{z^{n+1}}$ prises le long d'un contour de deuxième espèce.

1. Définitions. — Étant donnés, dans le plan représentatif d'une variable complexe, un point dont l'affixe est a et un contour BCD (*fig.* 1), admettons que les circonstances suivantes se présentent simultanément :

1° Les extrémités B, D du contour sont plus éloignées de l'origine



que le point a; 2° le contour BCD est rencontré par la droite Oa en un point unique, compris sur le segment Oa, ou satisfait à cette condition après des déformations convenables.

Nous dirons alors, pour abréger le langage, que le contour BCD est de *première espèce* par rapport au point a.

Nous désignerons par contour de *deuxième espèce* par rapport à un point a un contour dont toutes les parties sont plus éloignées de l'origine que ce point a.

Considérons enfin un contour ab limité à un point a (*fig.* 2). Admettons que toutes les parties de ce contour soient plus éloignées de l'origine que l'extrémité a. Nous dirons que ce contour est de *troisième espèce* par rapport au point a.

Nous ne considérerons, dans la suite de ce travail, que des contours décomposables en un nombre fini d'arcs convexes et d'arcs concaves, par rapport à l'origine, et ne tournant pas indéfiniment dans une région du plan.

Si une fonction $\Phi(z)$ est finie le long d'un pareil contour C, sauf dans le voisinage d'un certain nombre de points $z = c_1$, $z = c_2$, ..., et qu'il existe des nombres γ_1, γ_2, ..., inférieurs à 1, tels que les pro-

duits $(z - c_1)^{\gamma_1}\Phi(z)$, $(z - c_2)^{\gamma_2}\Phi(z)$, ... ne dépassent pas un nombre fixe lorsque z tend respectivement vers c_1, c_2 ..., nous dirons encore, pour abréger le langage, que $\Phi(z)$ est quasi finie le long de ce contour. Nous adopterons la même qualification pour $\Phi(z)$, si le contour s'étendant à l'infini et si $\Phi(z)$ devenant infini le long de ce contour, pour $z = \infty$, le module du quotient $\frac{\Phi(z)}{z^p}$ ne dépasse pas un nombre fixe pour les points à l'infini le long du contour, p désignant un nombre fixe.

2. Théorème I. — *q désignant un nombre fixe quelconque et η l'intégrale*

$$\eta = \int \Phi(z) \frac{dz}{z^{n+1}}, \tag{1}$$

prise le long d'un contour de deuxième espèce par rapport à un point d'affixe a, où $\Phi(z)$ désigne une fonction finie *ou* quasi finie *le long de ce contour, le produit $n^q a^n \eta$ tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment par des valeurs positives.*

Premier cas. — L'intégrale (1) est prise le long d'un contour qui n'a pas de points à l'infini et le long duquel la fonction $\Phi(z)$ est finie. On a identiquement

$$n^q a^n \eta = \int \frac{1}{z} \Phi(z)\, n^q \left(\frac{a}{z}\right)^n dz.$$

Appelons M le module maximum de $n^q \left(\frac{a}{z}\right)^n$ le long du contour C. Comme $\left|\frac{a}{z}\right| < 1$ par définition, M tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment. Or, on peut poser le long du contour C, en appelant λ un facteur imaginaire de module au plus égal à l'unité,

$$n^q \left(\frac{a}{z}\right)^n = \mathrm{M}\lambda; \tag{2}$$

il en résulte

$$n^q a^n \eta = \mathrm{M} \int \frac{\lambda}{z} \Phi(z)\, dz.$$

L'intégrale figurant dans le second membre de cette égalité est finie ;

ce second membre tend donc vers zéro avec M, lorsque n croît indéfiniment. C. Q. F. D.

Deuxième cas. — Le contour d'intégration n'a pas de points à l'infini, la fonction $\Phi(z)$ devient infinie en un point $z = c$ de ce contour, mais on peut trouver un nombre $\gamma < 1$ tel que le produit $(z-c)^\gamma \Phi(z)$ soit fini ou nul pour $z = c$. On a identiquement

$$n^q a^n \eta = \int \frac{(z-c)^\gamma \Phi(z)}{z} n^q \left(\frac{a}{z}\right)^n \frac{dz}{(z-c)^\gamma}.$$

En appelant M le module maximum de $n^q \left(\frac{a}{z}\right)^n$ le long du contour, on peut écrire comme plus haut (2)

$$n^q a^n \eta = \mathrm{M} \int \frac{\lambda (z-c)^\gamma \Phi(z)}{z} \frac{dz}{(z-c)^\gamma}.$$

Le module de l'intégrale qui figure dans le second membre est inférieur à

$$\int \left| \frac{\lambda (z-c)^\gamma \Phi(z)}{z} \right| \left| \frac{dz}{(z-c)^\gamma} \right|,$$

et comme, par hypothèse, la première partie de l'élément différentiel est finie le long du contour, cette nouvelle intégrale est finie en même temps que l'intégrale

$$\int_C \left| \frac{dz}{(z-c)^\gamma} \right|,$$

qui est finie puisque $\gamma < 1$.

Le produit $n^q a^n \eta$ tend donc vers zéro avec M, lorsque n croît indéfiniment. C. Q. F. D.

Troisième cas. — Le contour d'intégration s'étend à l'infini, et l'on peut trouver un nombre positif p tel que $\left| \frac{1}{z^p} \Phi(z) \right|$ ne dépasse pas un nombre fixe le long du contour. On a identiquement

$$n^q a^n \eta = a^{p+1} \int_C \frac{\Phi(z)}{z^p} \frac{1}{z^2} n^q \left(\frac{a}{z}\right)^{n-p-1} dz.$$

Appelons M le module maximum de $n^q\left(\frac{a}{z}\right)^{n-p-1}$ le long du contour, module qui tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment puisque p est fixe; on peut écrire comme plus haut

$$n^q\left(\frac{a}{z}\right)^{n-p-1} = \mathrm{M}\lambda,$$

λ étant de module au plus égal à l'unité. Il en résulte

$$n^q a^n \eta = a^{p+1}\mathrm{M}\int_{\mathrm{C}} \lambda \frac{\Phi(z)}{z^p}\frac{dz}{z^2}.$$

Le module de l'intégrale qui figure dans le second membre est inférieur à

$$\int_{\mathrm{C}} \left|\lambda \frac{\Phi(z)}{z^p}\right| \left|\frac{dz}{z^2}\right|$$

et comme, par hypothèse, la première partie de l'élément différentiel est finie le long du contour, cette nouvelle intégrale est finie comme l'intégrale

$$\int_{\mathrm{C}} \left|\frac{dz}{z^2}\right|.$$

Le produit $n^q a^n \eta$ tend donc encore vers zéro avec M, lorsque n croît indéfiniment. C. Q. F. D.

Le cas général où le contour passe par plusieurs infinis de $\Phi(z)$ et s'étend à l'infini se ramène aux trois cas qui viennent d'être examinés en fractionnant le contour.

§ II.

Des intégrales de la forme $\int \Phi(z)\frac{dz}{z^{n+1}}$ prises le long d'un contour de troisième espèce.

5. Lemme I. — *Le rapport* $\frac{\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)}$, *où* Γ *représente la fonction eulérienne de deuxième espèce,* h *un nombre fini quelconque et* n *un nombre positif très grand, est de l'ordre de* $\frac{1}{n^{1+h}}$.

Cette proposition résulte de ce que le produit

$$u_n = n^{1+h}\frac{\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)} \tag{3}$$

tend vers une limite finie et déterminée lorsque n augmente indéfiniment. On peut l'établir en prenant pour point de départ l'expression approchée de Stirling; en voici une démonstration directe [1] :

Appelons ν l'entier contenu dans n et posons

$$n = \nu + \lambda,$$
$$u_\nu = (\nu+\lambda)^{1+h}\frac{\Gamma(\nu+\lambda-h)}{\Gamma(\nu+\lambda+1)}.$$

Si l'on donne à ν une valeur entière finie p supérieure à h, u_ν est une quantité finie et non nulle. Cela étant, on a, d'après une propriété fondamentale de la fonction Γ,

$$\frac{u_\nu}{u_{\nu-1}} = \left(1-\frac{1}{\nu+\lambda}\right)^{-1-h}\left(1-\frac{h+1}{\nu+\lambda}\right).$$

Remplaçant dans cette identité ν successivement par p, $p+1$, ... ν, et ajoutant membre à membre après avoir pris les logarithmes népériens, il vient

$$\operatorname{Log} u_\nu = \operatorname{Log} u_p + \sum_{\varpi=p}^{\varpi=\nu}\left[\operatorname{Log}\left(1-\frac{h+1}{\varpi+\lambda}\right) - (h+1)\operatorname{Log}\left(1-\frac{1}{\varpi+\lambda}\right)\right].$$

Lorsque ν augmente indéfiniment, la somme écrite au second membre devient une série absolument convergente, car le terme général multiplié par ϖ^2 a une limite finie $-\frac{h(h+1)}{2}$.

$\operatorname{Log} u_p$ étant fini, $\operatorname{Log} u_\nu$ tend vers une limite finie et u_ν, ou le second membre de la formule (3), vers une limite finie et différente de zéro. C. Q. F. D.

---

[1] Je n'insiste sur cette proposition connue qu'à cause de son extrême importance pour ce qui va suivre. Au sujet de cette proposition, *voir* BAILLAUD, *Cours d'Astronomie à l'usage des étudiants de la Faculté des Sciences*, t. I, p. 5 et 6). — *Voir* aussi DE SAINT-GERMAIN, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1890, 1re Partie, p. 212.

LEMME II. — *Considérons une droite indéfinie ab partant d'un point a et située sur le prolongement de Oa. L'intégrale*

$$(4) \qquad \mathrm{I} = \int \left(\frac{z}{a} - 1\right)^h \frac{dz}{z^{n+1}},$$

prise le long du chemin ab, dans laquelle h est un nombre supé-

Fig. 3.

rieur à -1 *et n un nombre entier ou fractionnaire supérieur à h, a pour valeur*

$$(5) \qquad \mathrm{I} = \frac{1}{a^n} \frac{\Gamma(h+1)\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)}.$$

On suppose d'ailleurs que la détermination du binome $\left(\frac{z}{a} - 1\right)^h$ qui figure sous le signe $\int$ est celle qui est réelle et positive le long de ab.

En effet, le long de ab, $\frac{z}{a}$ est réel et compris entre 1 et ∞; on peut poser, en appelant t une variable réelle comprise entre 1 et 0,

$$\frac{z}{a} = \frac{1}{t},$$
$$\left(\frac{z}{a} - 1\right)^h = \left(\frac{1}{t} - 1\right)^h,$$

$\left(\frac{1}{t} - 1\right)^h$ étant réel et positif. Cela étant, l'intégrale proposée devient, en prenant t comme variable,

$$\mathrm{I} = \frac{1}{a^n} \int_0^1 (1-t)^h t^{n-h-1}\, dt.$$

Or, l'intégrale qui figure dans le second membre est une intégrale

eulérienne de première espèce, qui a pour valeur

$$\int_0^1 (1-t)^h t^{n-h-1}\,dt = \frac{\Gamma(h+1)\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)}.$$

Notre proposition est donc démontrée.

Prenons sur ab (*fig.* 3) un point d à une distance de a finie d'ailleurs aussi petite qu'on veut.

Le chemin db prolongé à l'infini étant de seconde espèce par rapport au point a, on peut écrire, en vertu du théorème I,

$$(ad) = (ab) + \eta$$

ou

$$(ad) = \frac{1}{a^n}\frac{\Gamma(h+1)\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)} + \eta,$$

le produit $n^q a^n \eta$ tendant vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, quel que soit le nombre fixe q.

De là il résulte que le produit $a^n n^{1+h}(ad)$ a même limite que le produit $a^n n^{1+h}(ab)$ qui, d'après le lemme I, tend vers une limite finie et différente de zéro lorsque n augmente indéfiniment.

Remarque. — Appelons ω l'argument de a, R son module, l la longueur ad. On peut poser, le long de ad,

$$z = (\mathrm{R}+x)\mathrm{E}^{i\omega},$$

x étant une variable réelle comprise entre o et l. L'argument de $\left(\frac{z}{a}-1\right)^h$ le long de ad étant nul, l'intégrale (ad) devient, en prenant x pour variable d'intégration,

$$(ad) = \frac{1}{\mathrm{E}^{in\omega}}\int_0^l \frac{\left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^h}{(\mathrm{R}+x)^{n+1}}\,dx.$$

On en tire

$$a^n n^{1+h}(ad) = \mathrm{R}^n n^{1+h}\int \frac{\left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^h}{(\mathrm{R}+x)^{n+1}}\,dx.$$

Le premier membre tendant vers une limite lorsque n augmente indéfiniment, il en est de même du produit

$$R^n n^{1+h} \int_0^l \frac{\left(\frac{x}{R}\right)^h}{(R+x)^{n+1}} dx.$$

L'intégrale qui y figure est donc, pour n très grand, de l'ordre de $\frac{1}{R^n} \frac{1}{n^{1+h}}$.

C'est là un point essentiel.

Lemme III. — *L'intégrale*

$$I = \int f(z)\, dz,$$

prise le long d'un chemin AA′, *peut s'écrire*

$$I = \lambda \operatorname{arc} AA' f(\xi),$$

λ *étant un facteur de module inférieur à* 1, arc AA′ *la longueur du chemin d'intégration et* ξ *l'affixe d'un point de ce contour.*

De cette proposition bien connue, due à M. Darboux, il résulte que l'intégrale

$$I = \int \Phi(z) \frac{dz}{z^{n+1}},$$

prise le long d'un arc de cercle ABC décrit d'un point a comme

Fig. 4.

centre avec un rayon infiniment petit, est infiniment petite, si l'on peut trouver un nombre k inférieur à 1, tel que le module du produit $\left(\frac{z}{a} - 1\right)^k \Phi(z)$ ne dépasse pas un nombre fixe lorsque z est infiniment voisin de a.

En effet, posons

$$\left(\frac{z}{a} - 1\right)^k \Phi(z) = \Phi_1(z).$$

On peut écrire

$$I = \int \Phi_1(z)\left(\frac{z}{a} - 1\right)^{-k} \frac{dz}{z^{n+1}}$$

ou

$$I = \lambda(\text{arc ABC})\Phi_1(\xi)\frac{\left(\frac{\xi}{a} - 1\right)^{-k}}{\xi^{n+1}}.$$

En appelant r le rayon de la circonférence et R le module de a, on a

$$|\lambda \,\text{arc}(\text{ABC})| < 2\pi r, \qquad \left|\frac{\left(\frac{\xi}{a} - 1\right)^{-k}}{\xi^{n+1}}\right| < \frac{R^k r^{-k}}{(R - r)^{n+1}}.$$

On peut donc écrire

$$|I| < 2\pi \frac{R^k r^{1-k}}{(R - r)^{n+1}} |\Phi_1(\xi)|;$$

$1 - k$ étant positif, on peut toujours prendre r assez petit pour que, quelle que soit la valeur donnée à n, $|I|$ soit inférieur à toute quantité donnée. $|I|$ tend donc vers zéro lorsque r tend vers zéro. C. Q. F. D.

Lemme IV. — *Appelons h une quantité plus grande que -1, n un nombre supérieur à h, et considérons l'intégrale*

$$I = \int \left(\frac{z}{a} - 1\right)^h \frac{dz}{z^{n+1}},$$

prise le long d'un chemin ab (fig. 5) de troisième espèce par rapport au point a, dont l'extrémité b est à l'infini. Admettons que la détermination de $\left(\frac{z}{a} - 1\right)^h$ figurant sous le signe $\int$ soit celle qui est réelle et positive le long du prolongement, au delà de a, du segment de droite joignant l'origine au point a.

Dans ces conditions, si l'intégration part du point a, on a

$$I = \frac{1}{a^n} \frac{\Gamma(h+1)\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)}. \tag{6}$$

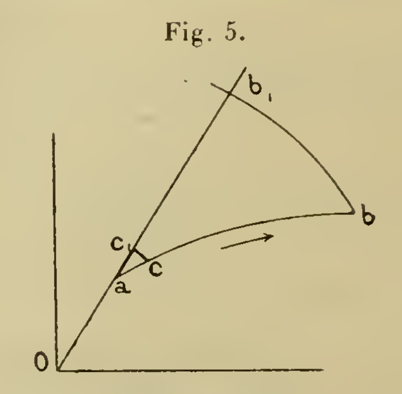
En effet, menons suivant le prolongement de Oa une droite indéfinie ab_1 et décrivons : 1° de l'origine comme centre, un arc de cercle bb_1 de rayon infini ; 2° du point a comme centre, avec un rayon infiniment petit, l'arc de cercle cc_1.

On peut écrire

$$(cb) = (cc_1) + (c_1 b_1) + (b_1 b), \tag{7}$$

en convenant, suivant l'usage, de représenter l'intégrale proposée prise

Fig. 5.



le long d'un certain chemin par ce chemin écrit entre parenthèses. D'après le lemme III, l'intégrale (cc_1) est infiniment petite.

Ainsi, en faisant tendre vers zéro le rayon de l'arc cc_1, l'équation (7) devient

$$(ab) = (ab_1) + (b_1 b). \tag{8}$$

L'intégrale (bb_1) est nulle, car en appelant, comme ci-dessus, λ un facteur convenable, de module inférieur à 1, et ξ l'affixe d'un point particulier du chemin d'intégration, on a

$$(b_1 b) = \lambda \operatorname{arc} bb_1 \frac{\left(\frac{\xi}{a} - 1\right)^h}{\xi^{n+1}}.$$

Or, en appelant ρ le rayon avec lequel a été décrit l'arc bb_1, on a

$$\operatorname{arc} bb_1 < 2\pi\rho,$$

$$\left| \frac{\left(\frac{\xi}{a} - 1\right)^h}{\xi^{a+1}} \right| = \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{\xi} \right|^h \frac{1}{\rho^{n-h+1}}.$$

On peut donc écrire

$$(b_1 b) < 2\pi \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{\xi}\right|^h \frac{1}{\rho^{n-h}}.$$

Lorsque ρ augmente indéfiniment, $\frac{1}{\xi}$ tend vers zéro; le facteur $\left|\frac{1}{a} - \frac{1}{\xi}\right|^h$ reste fini et le facteur $\frac{1}{\rho^{n-h}}$ tend vers zéro. L'intégrale $(b_1 b)$ tend donc vers zéro et l'égalité (8) se réduit à

$$(ab) = (ab_1). \tag{9}$$

L'argument de $\left(\frac{\xi}{a} - 1\right)^h$ le long de ab_1 étant nul, l'égalité (9) donne, d'après le lemme II,

$$(ab) = \frac{1}{a^n} \frac{\Gamma(h+1)\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. — *Si l'extrémité b du contour est à une distance de a finie, on peut écrire*

$$I = \frac{1}{a^n} \frac{\Gamma(h+1)\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)} + \eta, \tag{10}$$

le produit $n^q a^n \eta$ tendant vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, quel que soit le nombre fixe q.

C'est ce qui résulte du théorème I. On passe effectivement du cas actuel au cas où b est à l'infini, en ajoutant au chemin d'intégration donné un contour de seconde espèce par rapport au point a.

Lemme V. — *Soient $f(x)$ une fonction imaginaire d'une variable réelle x, et $F(x)$ une fonction réelle de x qui ne change pas de signe lorsque x reste compris entre α et β; on a*

$$\int_\alpha^\beta F(x) f(x)\, dx = \lambda f(\xi) \int_\alpha^\beta F(x)\, dx, \tag{11}$$

λ étant un facteur de module inférieur à 1, et ξ une valeur de x comprise entre α et β.

Cette proposition, découverte par M. Darboux [1], est entièrement générale et s'applique du moment où les intégrales

$$\int_\alpha^\beta F(x)f(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_\alpha^\beta F(x)\,dx$$

sont finies.

Lemme VI. — *Considérons l'intégrale*

$$(12)\qquad I = \int \left(\frac{z}{a} - 1\right)^h \psi(z) \frac{dz}{z^{n+1}},$$

prise le long d'un chemin ab (fig. 6) de troisième espèce par rapport au point a, h étant un nombre supérieur à -1 *et* $\psi(z)$ *une fonction* finie *ou* quasi finie *de z le long du contour d'intégration* (n° **1**).

Supposons : 1° que les singularités de cette fonction soient à une distance du point a supérieure à une longueur finie ρ; *2° que* $\psi(a)$ *soit finie, le point a pouvant d'ailleurs être un point singulier de* $\psi(z)$. *Dans ces conditions, le produit* $R^n n^{1+h}|I|$, *où* $R = |a|$, *ne dépasse pas un nombre fixe lorsque n croît indéfiniment.*

En effet, prenons un point D, sur le contour ab, à la distance ρ du point a.

Décrivons du point a comme centre : 1° un arc de cercle DC, limité d'une part au point D et d'autre part en C, à la droite Oa prolongée; 2° un arc de cercle $a'a''$ avec un rayon infiniment petit.

D'après les hypothèses faites, les singularités de $\psi(z)$ sont extérieures à l'aire C$a'a''$D. Il en résulte que le chemin a''D peut être remplacé par le chemin $a''a'$CD.

Ainsi on peut écrire

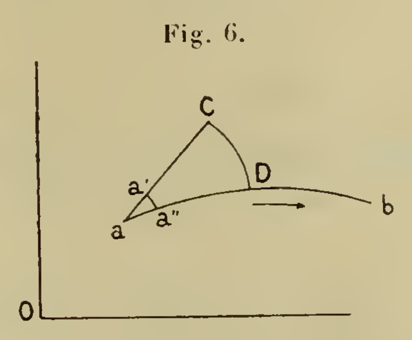
$$(a''b) = (a''a') + (a'C) + (CD) + (Db).$$

---

[1] Darboux, *Journal de Mathématiques*, 1876. — *Voir* aussi E. Picard, *Traité d'Analyse*, 1re édition, t. I, p. 36.

Les chemins CD, Db sont de seconde espèce par rapport au point a, en sorte qu'en désignant par η la somme (CD) + (Db), le produit $n^q R^n \eta$ tend vers zéro, en vertu du théorème I, lorsque n augmente indéfiniment, q désignant un nombre fixe quelconque.

Fig. 6.



Quant à l'intégrale $(a''a')$, elle est infiniment petite, comme on l'a établi au lemme III.

Ainsi on peut écrire, en faisant tendre vers zéro le rayon de l'axe $a''a'$,

$$(ab) = (a\mathrm{C}) + \eta.$$

Appelons ω et R l'argument et le module de a; on peut faire le long de aC

$$z = (x + \mathrm{R})\mathrm{E}^{i\omega},$$

x étant une variable réelle comprise entre o et $l = a\mathrm{C}$. On a aussi le long de aC

$$\left(\frac{z}{a} - 1\right)^h = \left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^h,$$

$\left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^n$ étant positif et réel.

En prenant x comme variable d'intégration, l'intégrale $(a\mathrm{C})$ devient

$$(ab) = \frac{1}{\mathrm{E}^{in\omega}} \int_0^l \frac{\left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^n}{(\mathrm{R} + x)^{n+1}} \psi(a + x\mathrm{E}^{i\omega})\, dx + \eta.$$

La fonction $\dfrac{\left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^n}{(\mathrm{R} + x)^{n+1}}$ est positive ; on peut donc, d'après le lemme V,

faire sortir la fonction ψ du signe $\int$ et prendre comme valeur de l'intégrale (12)

$$(13) \qquad (ab) = \lambda\psi(a + \xi E^{i\omega}) \frac{1}{E^{in\omega}} \int_0^l \frac{\left(\frac{x}{R}\right)^h}{(R+x)^{n+1}} dx + \eta,$$

λ étant un facteur de module inférieur à 1 et ξ l'affixe d'un point de aC. Or l'intégrale qui figure dans le second membre de cette égalité (lemme II) est telle que son produit par $R^n n^{1+h}$ reste fini lorsque n augmente indéfiniment.

La proposition à démontrer résulte immédiatement de cette propriété puisque la fonction ψ est finie et que le produit $R^n n^{1+h} \eta$ tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment.

Théorème II. — *Soient n un nombre positif très grand, entier ou fractionnaire, et $F(z)$ une fonction indépendante de n. Considérons l'intégrale*

$$(14) \qquad M = \int_C F(z) \frac{dz}{z^{n+1}},$$

prise le long d'un contour C de troisième espèce par rapport à un point d'affixe a. Cette intégrale étant supposée finie, admettons que a soit séparé des singularités de $F(z)$ et de l'origine par des espaces finis. Admettons, en outre, qu'on puisse écrire dans le domaine de a

$$(15) \qquad \begin{cases} F(z) = A_1\left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha_1} + A_2\left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha_2} + \dots \\ \qquad + A_p\left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha_p} + \left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha} \psi(z), \end{cases}$$

la fonction $\psi(z)$ étant finie dans le domaine de a; $A_1, A_2, \dots, A_p$ désignant des constantes, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha$ des nombres entiers ou fractionnaires vérifiant les inégalités

$$-1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_p < \alpha.$$

Dans ces conditions, si l'on pose

$$(16) \quad F_1(z) = A_1\left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha_1} + A_2\left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha_2} + \ldots + A_p\left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha_p}$$

et

$$N = \int_C F_1(z) \frac{dz}{z^{n+1}},$$

l'intégrale étant prise le long du contour C, *le produit*

$$R^n n^{1+\alpha}(M - N)$$

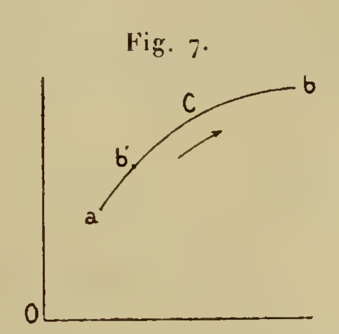
n'augmente pas indéfiniment avec n.

On a en effet, identiquement,

$$M - N = \int_C [F(z) - F_1(z)] \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Figurons le chemin C et prenons sur ce chemin un point b' assez

Fig. 7.



près du point a pour que l'expression (15) de $F(z)$ soit valable tout le long de l'arc ab'. On peut écrire

$$(17) \qquad M - N = (ab') + (b'b).$$

Le chemin $b'b$ est de seconde espèce par rapport au point a; désignons par η' l'intégrale $(b'b)$. On sait, en vertu du théorème I, que le produit $a^n n^q \eta'$ tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, quel que soit le nombre fixe q.

Or, en remplaçant dans l'intégrale (ab') la différence $F(z) - F_1(z)$

par sa valeur tirée des équations (15) et (16), on a

$$M - N = \int_{(ab')} \left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha} \psi(z) \frac{dz}{z^{n+1}} + \eta,$$

d'où

$$a^n n^{1+\alpha}(M - N) = a^n n^{1+\alpha} \int_{(ab')} \left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha} \psi(z) \frac{dz}{z^{n+1}} + a^n n^{1+\alpha} \eta.$$

Lorsque n augmente indéfiniment, $a^n n^{1+\alpha}\eta$ tend vers zéro, et $a^n n^{1+\alpha} \int_{(ab')} \left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha} \psi(z)$ reste fini d'après le lemme VI. C. Q. F. D.

5. Évaluation approchée de l'intégrale (14). — Nous supposerons essentiellement, pour l'application de ce théorème, que les constantes $A_1, A_2, \ldots, A_p$ ont été choisies de façon que les déterminations des binomes $\left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha_1}$, $\left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha_2}$, ..., figurant dans le développement (15) de $F(z)$, soient celles qui sont réelles et positives pour les points z situés sur le prolongement, au delà de a, du segment de droite allant de l'origine à ce point a. Posons

$$(18) \qquad V_h = \frac{1}{a^n} \frac{\Gamma(\alpha_h + 1)\Gamma(n - \alpha_h)}{\Gamma(n+1)};$$

on a, d'après le lemme IV,

$$(19) \qquad \int_{(ab')} \left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha_h} \frac{dz}{z^{n+1}} = V_h + \eta_h,$$

le produit $a^n n^{1+h}\eta_h$ tendant vers zéro lorsque n augmente indéfiniment.

Le théorème II donne

$$M = N + N',$$

le produit $a^n n^{1+\alpha} N'$ n'augmentant pas indéfiniment avec n, et

$$N = A_1 \int_{(ab)} \left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha_1} \frac{dz}{z^{n+1}} + A_2 \int_{(ab)} \left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha_2} \frac{dz}{z^{n+1}} + \ldots$$
$$+ A_p \int_{(ab)} \left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha_p} \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

On peut écrire, d'après la formule (19),

$$N = A_1 V_1 + A_2 V_2 + \ldots + A_p V_p + \eta,$$

en posant

$$\eta = A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + \ldots + A_p \eta_p;$$

et comme $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sont des constantes finies, le produit $a^n n^{1+\alpha} \eta$ tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment.

Ainsi on peut écrire

$$(20) \qquad M = A_1 V_1 + A_2 V_2 + A_3 V_3 + \ldots + A_p V_p + N'_1,$$

le produit $a^n n^{1+\alpha} N'_1$ n'augmentant pas indéfiniment avec n. D'après le lemme II, V_1 est, pour n très grand, de l'ordre de $\frac{1}{a^n} \frac{1}{n^{1+\alpha_1}}$, V_2 de l'ordre de $\frac{1}{a^n} \frac{1}{n^{1+\alpha_2}}$, ... M se trouve donc décomposé en un nombre fini de termes qui décroissent de telle sorte que le rapport d'un terme au précédent tend vers zéro en même temps que $\frac{1}{n}$.

On voit aussi qu'en prenant $A_1 V_1$ comme valeur approchée de M, on commet une erreur de l'ordre de $\frac{1}{a_n} \frac{1}{n^{1+\alpha_2}}$. On peut écrire

$$M = A_1 V_1 (1 + \varepsilon_2),$$

ε_2 étant infiniment petit, de l'ordre de $\frac{1}{n^{\alpha_2 - \alpha_1}}$.

Si l'on prend $A_1 V_1 + A_2 V_2$ comme valeur approchée de M, on commet une erreur de l'ordre de $\frac{1}{a^n} \frac{1}{n^{1+\alpha_3}}$; on peut écrire

$$M = (A_1 V_1 + A_2 V_2)(1 + \varepsilon_3),$$

ε_3 étant infiniment petit, de l'ordre de $\frac{1}{n^{\alpha_3 - \alpha_1}}$.

Etc.

L'erreur commise en prenant pour M sa valeur approchée, lorsque n est très grand, est d'autant plus petite que le nombre des termes pris dans le second nombre de l'équation (20) est plus considérable.

Si l'on veut avoir l'expression de M développée suivant les puissances descendantes de n, il restera à faire usage de la formule de Stirling. Nous établirons plus loin directement [formule (51)] l'expression très commode pour cet usage,

$$\Gamma(n+p) = \sqrt{2\pi}\,E^{-n} n^{n+p-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{1}{12n}[1 + 6p(p-1)](1+\varepsilon) \right\},$$

dans laquelle E désigne la base des logarithmes népériens, p un nombre fini, n un grand nombre et ε une quantité de l'ordre de $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire telle que $n\varepsilon$ tend vers une limite pour $n = \infty$.

§ III.

Des intégrales de la forme $\int \Phi(z)\frac{dz}{z^{n+1}}$ prises le long d'un contour de première espèce.

6. Lemme VII. — *L'intégrale*

$$I = \frac{1}{2i\pi}\int \left(1 - \frac{z}{a}\right)^h \frac{dz}{z^{n+1}},$$

prise le long d'un contour ABC *de première espèce par rapport au point* a, *dont les extrémités* A, C *sont à l'infini, a pour valeur*

$$I = \frac{1}{a^n}\frac{\Gamma(n-h)}{\Gamma(-h)\Gamma(n+1)}, \tag{21}$$

n désignant un nombre quelconque supérieur à h.

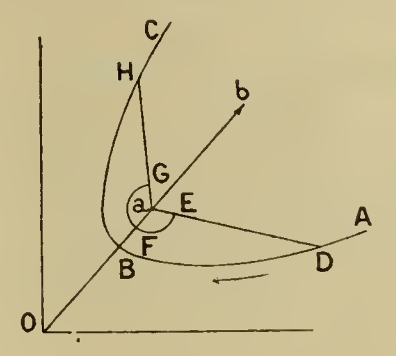
On suppose : 1° que la variable en cheminant sur le contour d'intégration tourne autour du point a dans le sens des arguments décroissants; 2° que la détermination du binome $\left(1 - \frac{z}{a}\right)^h$ qui figure dans l'élément différentiel de l'intégrale proposée est celle qui est réelle et positive le long du segment de droite joignant l'origine au point a.

1° *Supposons $h > -1$.*

Prenons sur la branche BC du contour un point quelconque H, plus

éloigné de l'origine que le point a, et menons la droite $\mathrm{H}a$. Prenons de même sur la branche BA un point D, plus éloigné de l'origine que le

Fig. 8.



point a, et menons la droite $a\mathrm{D}$. Du point a comme centre décrivons, avec un rayon infiniment petit, l'arc de cercle EFG limité aux droites $a\mathrm{D}$, $a\mathrm{H}$.

Le chemin DEFGH est équivalent, pour l'intégrale proposée, au chemin DBH. On peut donc écrire

$$(\mathrm{ABC}) = (\mathrm{ADE}) + (\mathrm{EFG}) + (\mathrm{GHC}).$$

L'intégrale (EFG) peut devenir plus petite que toute quantité donnée, en prenant le rayon de la circonférence assez petit, comme nous l'avons déjà établi à propos du lemme III. En faisant tendre r vers zéro, il vient donc

$$(\mathrm{ABC}) = (a\mathrm{HC}) - (a\mathrm{DA}).$$

Or, étant donné que la détermination de $\left(1 - \frac{z}{a}\right)^h$, qui rentre sous le signe $\int$ de l'intégrale proposée, est celle dont l'argument est nul le long de $\mathrm{O}a$, on peut écrire

$$(a\mathrm{HC}) = \frac{\mathrm{E}^{-ih\pi}}{2i\pi} \int_{a\mathrm{HC}} \left(\frac{z}{a} - 1\right)^h \frac{dz}{z^{n+1}},$$

$$(a\mathrm{DA}) = \frac{\mathrm{E}^{ih\pi}}{2i\pi} \int_{a\mathrm{DA}} \left(\frac{z}{a} - 1\right)^h \frac{dz}{z^{n+1}},$$

la détermination de $\left(\frac{z}{a}-1\right)^h$ qui figure sous les signes $\int$ étant celle dont l'argument est nul le long du chemin rectiligne ab situé dans le prolongement de Oa. Il en résulte, en vertu du lemme IV,

$$(a\mathrm{HC}) = \frac{E^{-ih\pi}}{2i\pi}\,\frac{1}{a^n}\,\frac{\Gamma(h+1)\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)},$$

$$(a\mathrm{DA}) = \frac{E^{ih\pi}}{2i\pi}\,\frac{1}{a^n}\,\frac{\Gamma(h+1)\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)},$$

$$(\mathrm{ABC}) = -\frac{\sin h\pi}{\pi}\,\frac{\Gamma(h+1)\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)}.$$

Tenant compte de la relation connue

$$\Gamma(-h)\Gamma(1+h) = -\frac{\pi}{\sin h\pi},$$

on tombe sur le résultat qu'il fallait établir.

2° *h est inférieur à* -1.

Il suffit d'établir que le théorème, supposé vrai pour h, a encore lieu lorsqu'on remplace h par $h-1$.

De l'identité

$$\frac{d}{dz}\,\frac{\left(1-\frac{z}{a}\right)^h}{z^{n+1}} = -(n+1)\frac{\left(1-\frac{z}{a}\right)^h}{z^{n+2}} - \frac{h}{a}\,\frac{\left(1-\frac{z}{a}\right)^{h-1}}{z^{n+1}}$$

on tire

$$\frac{1}{2i\pi}\int\frac{\left(1-\frac{z}{a}\right)^{h-1}}{z^{n+1}}\,dz = -\frac{a}{2i\pi h}\left[\frac{\left(1-\frac{z}{a}\right)^h}{z^{n+1}}\right] - a\,\frac{n+1}{2i\pi h}\int\frac{\left(1-\frac{z}{a}\right)^h}{z^{n+2}}\,dz.$$

Les limites du contour étant à l'infini, la partie (ABC) intégrée disparaît puisque $n > h$; il reste

$$\frac{1}{2i\pi}\int\frac{\left(1-\frac{z}{a}\right)^{h-1}}{z^{n+1}}\,dz = -a\,\frac{n+1}{h}\,\frac{1}{2i\pi}\int\frac{\left(1-\frac{z}{a}\right)^h}{z^{n+2}}\,dz$$

ou, d'après la formule (21),

$$\frac{1}{2i\pi}\int \frac{\left(1-\frac{z}{a}\right)^{h-1}}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{a^n}\,\frac{n+1}{-h}\,\frac{\Gamma(n+1-h)}{\Gamma(-h)\,\Gamma(n+2)},$$

ce qui devient, d'après l'une des propriétés fondamentales de la fonction Γ,

$$\frac{1}{2i\pi}\int \frac{\left(1-\frac{z}{a}\right)^{h-1}}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{a^n}\,\frac{\Gamma[n-(h-1)]}{\Gamma[-(h-1)]\,\Gamma(n+1)}.$$

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Si les extrémités* A, C *du contour sont à distance finie de l'origine, on a*

$$I = \frac{1}{a^n}\,\frac{\Gamma(n-h)}{\Gamma(-h)\,\Gamma(n+1)} + \eta,$$

le produit $n^q a^n \eta$ *tendant vers zéro lorsque* n *augmente indéfiniment, quel que soit le nombre fixe* q.

C'est ce qui résulte du lemme II. On passe effectivement du cas actuel au cas où les extrémités du contour sont à l'infini en ajoutant, au chemin d'intégration donné, des contours de seconde espèce, par rapport au point a, joignant les points A et C à l'infini.

Lemme VIII. — *Considérons l'intégrale*

$$I = \int \Phi(z)\,\frac{dz}{z^{n+1}},$$

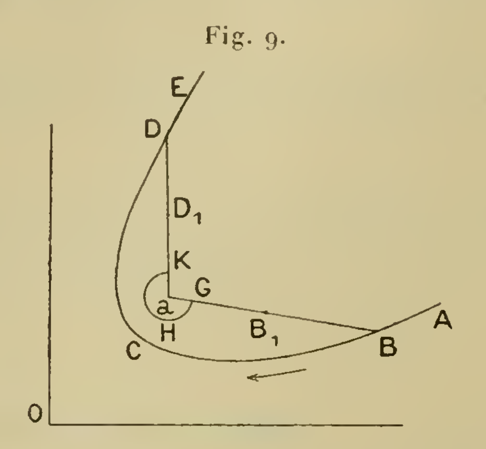
prise le long d'un chemin ABCDE (*fig.* 9) *de première espèce relativement à un certain nombre de points singuliers de* $\Phi(z)$, n *désignant un nombre positif.*

Cette intégrale étant supposée finie lorsque n *est fini, appelons* a *l'affixe de celui des points singuliers de* $\Phi(z)$ *qui approche le plus de l'origine et posons* $R = |a|$.

Admettons : 1° *que* a *soit séparé des autres points singuliers et de l'origine par des espaces finis ;* 2° *que si la fonction* $\Phi(z)$ *est infinie*

pour $z = a$ cet infini est d'ordre inférieur à l'unité; 3° que si le contour rencontre une ou plusieurs singularités de $\Phi(z)$ ces singularités sont plus éloignées de l'origine que le point a. Dans ces

Fig. 9.



conditions, on peut remplacer le contour d'intégration donné par deux chemins de troisième espèce, par rapport au point a, à la condition d'ajouter au résultat obtenu une quantité η dont le produit par $n^q R^n$ tend vers zéro, quel que soit le nombre fixe q, lorsque n augmente indéfiniment. La longueur de ces chemins de troisième espèce doit être finie, mais peut être prise aussi petite que l'on veut.

En effet, sur la branche CE du contour, prenons un point D plus éloigné de l'origine que a et menons la droite Da; sur la branche CA du contour, prenons un point B plus éloigné de l'origine que a et menons la droite Ba. Du point a comme centre, avec un rayon infiniment petit, décrivons un arc de cercle GHK limité aux droites aB, aD.

D'après l'hypothèse, on peut choisir les points D et B de telle sorte que les singularités de la fonction $\Phi(z)$ soient extérieures au contour BCDKHGB. On peut donc remplacer la partie BCD du contour donné par le chemin BGHKD.

Prenons sur aB un point B_1 quelconque, à distance finie de a, sur aD un point D_1 quelconque à distance finie de a. Ces points B_1 et D_1 sont plus éloignés de l'origine que le point a.

Cela étant, on peut écrire

$$(ABCDE) = (ABB_1) + (B_1G) + (GHK) + (KD_1) + (D_1DE).$$

Les chemins ABB_1, D_1DE sont de deuxième espèce par rapport au point a. On peut donc, d'après le lemme II, représenter la somme

$$(ABB_1)+(D_1DE)$$

par η le produit $n^q R^n \eta$ tendant vers zéro lorsque n augmente indéfiniment.

Quant à l'intégrale (GHK), elle est infiniment petite, comme on l'a établi à propos du lemme III.

Ainsi, en faisant tendre vers zéro le rayon de la circonférence GHK, il vient

$$(ABCDE)=(B_1a)+(aD_1)+\eta.$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Les points D_1 et B_1 étant plus éloignés de l'origine que a, on peut relier ces deux points par un chemin S de seconde espèce par rapport au point a. Il en résulte, d'après le théorème I, qu'on peut écrire, si $\Phi(z)$ est une fonction holomorphe dans le voisinage du point a,

$$\int_{(B_1 a)} \Phi(z)\frac{dz}{z^{n+1}}+\int_{(a D_1)} \Phi(z)\frac{dz}{z^{n+1}}=\eta',$$

le produit $n^q R^n \eta'$ tendant vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, quel que soit le nombre fixe q.

Le chemin S est effectivement équivalent au chemin $B_1 a D_1$ pour l'intégrale $\int \Phi(z)\frac{dz}{z^{n+1}}$.

7. Théorème III. — *Soit n un nombre positif très grand, entier ou fractionnaire. Considérons l'intégrale*

$$M=\frac{1}{2i\pi}\int_C F(z)\frac{dz}{z^{n+1}}, \tag{22}$$

prise le long d'un contour C de première espèce par rapport à un certain nombre de points singuliers de $F(z)$.

Appelons a l'affixe de celui de ces points singuliers qui approche le plus de l'origine.

Supposons que ce point a soit séparé des autres singularités de $F(z)$ *et de l'origine par des espaces finis et que le contour ne rencontre aucune singularité de* $F(z)$ *à une distance de l'origine inférieure ou égale à* $|a|$. *Admettons en outre qu'on puisse écrire, dans le voisinage de* a,

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} F(z) &= \varphi(z) + A_1\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_1} \\ &\quad + A_2\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_2} + \ldots + A_p\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_p} + \left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha}\psi(z); \end{aligned}\right.$$

la fonction φ *étant holomorphe et la fonction* ψ *finie dans le domaine de* a; $A_1, A_2, \ldots, A_p$ *désignant des constantes;* α, *un nombre supérieur à* -1, *vérifiant les inégalités*

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_p < \alpha.$$

Dans ces conditions, si l'on pose

$$(24)\quad F_1(z) = A_1\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_1} + A_2\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_2} + \ldots + A_p\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_p}$$

et

$$N = \frac{1}{2i\pi}\int_C F_1(z)\frac{dz}{z^{n+1}},$$

l'intégrale étant prise le long du contour C, *le produit*

$$R^n n^{1+\alpha}(M-N)$$

n'augmente pas indéfiniment avec n, *en faisant* $R = |a|$.

Les binomes affectés d'exposants positifs entiers rentrant dans la fonction φ, on peut faire l'hypothèse que la suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ ne contient pas d'entiers positifs.

Cela étant, considérons la différence

$$(25)\qquad M - N = \frac{1}{2i\pi}\int_L [F(z) - F_1(z)]\frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Dans le voisinage du point a on peut écrire, en vertu des formules (22) et (23),

$$(26)\qquad F(z) - F_1(z) = \varphi(z) + \left(1 - \frac{z}{a}\right)^\alpha \psi(z).$$

Si donc la fonction $F(z) - F_1(z)$ devient infinie pour $z = a$, cet infini est d'ordre inférieur à l'unité, puisque $\alpha > -1$. On peut dès lors, pour évaluer l'intégrale (25), remplacer le contour C par deux chemins de troisième espèce par rapport au point a, $B_1 a$, $a D_1$ (*fig.* 9), comme il a été dit au lemme VIII.

La longueur de ces chemins doit être finie, mais aussi petite qu'on veut; on doit d'ailleurs ajouter au résultat obtenu une quantité η' dont le produit par $R^n n^q$ tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, quel que soit le nombre fixe q.

Ainsi on peut écrire

$$M - N = \frac{1}{2i\pi}\int_{(B_1 a)} [F(z) - F_1(z)] \frac{dz}{z^{n+1}} + \frac{1}{2i\pi}\int_{(a D_1)} [F(z) - F_1(z)] \frac{dz}{z^{n+1}} + \eta'.$$

En choisissant les longueurs de $B_1 a$ et de $a D_1$ de façon que l'expression (26) soit valable le long de ces chemins, on aura

$$\begin{aligned} M - N = {} & \frac{1}{2i\pi}\int_{(B_1 a)} \varphi(z) \frac{dz}{z^{n+1}} + \frac{1}{2i\pi}\int_{(a D_1)} \varphi(z) \frac{dz}{z^{n+1}} \\ & + \frac{1}{2i\pi}\int_{(B_1 a)} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^\alpha \psi(z) \frac{dz}{z^{n+1}} \\ & + \frac{1}{2i\pi}\int_{(a D_1)} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^\alpha \psi(z) \frac{dz}{z^{n+1}} + \eta'. \end{aligned}$$

On peut remplacer la somme des intégrales dont l'élément différentiel dépend de $\varphi(z)$ par η'', comme on l'a fait observer à la fin du lemme VIII, le produit $n^q R^n \eta''$ tendant vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, quel que soit le nombre fixe q. Il vient donc, en faisant $\eta' + \eta'' = \eta$,

$$M - N = \frac{1}{2i\pi}\int_{(B_1 a)} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^\alpha \psi(z) \frac{dz}{z^{n+1}} + \frac{1}{2i\pi}\int_{(a D_1)} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^\alpha \psi(z) \frac{dz}{z^{n+1}} + \eta.$$

Le théorème qu'il s'agit de démontrer résulte de cette égalité, car le produit $n^{1+\alpha} R^n \eta$ tend vers zéro et le produit par $n^{1+\alpha} R^n$ de chacune des intégrales qui figure au second membre n'augmente pas indéfiniment avec n, d'après le lemme VI. C. Q. F. D.

Remarque. — Si la fonction $\psi(z)$ est identiquement nulle, c'est-à-dire si l'expression (22) de $F(z)$ se termine au terme en $\left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_p}$, la différence $M - N$ se réduit à η d'après ce qui précède.

On voit que le produit $R^n n^q (M - N)$ tend alors vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, quel que soit le nombre fixe q.

Cette circonstance se présente notamment lorsque a est un pôle de $F(z)$.

8. Évaluation approchée de l'intégrale (22). — Le théorème qui précède conduit à l'évaluation approchée de l'intégrale (22) lorsque n est un grand nombre.

Posons

$$T_h = \frac{1}{a^n} \frac{\Gamma(n - \alpha_h)}{\Gamma(-\alpha_h)\Gamma(n+1)}.$$

On peut écrire, en vertu du théorème précédent,

$$M = N - N',$$

le produit $R^n n^{1+\alpha} N'$ n'augmentant pas indéfiniment avec n. Or on a

$$\begin{aligned} N = {} & \frac{A_1}{2i\pi} \int_C \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_1} \frac{dz}{z^{n+1}} \\ & + \frac{A_2}{2i\pi} \int_C \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_2} \frac{dz}{z^{n+1}} + \ldots + \frac{A_p}{2i\pi} \int_C \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_p} \frac{dz}{z^{n+1}}. \end{aligned}$$

Supposons le sens de l'intégration choisi de façon que la variable, en cheminant sur le contour, tourne autour du point a, dans le sens des arguments décroissants. Admettons d'ailleurs que les déterminations des binomes qui figurent sous les signes $\int$ dans l'expression de N soient celles dont les arguments sont nuls le long du segment de droite joi-

gnant l'origine au point a. Dans ces conditions on a, d'après le corollaire du lemme VII,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_1}\frac{dz}{z^{n+1}} = T_1 + \eta_1,$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_2}\frac{dz}{z^{n+1}} = T_2 + \eta_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_p}\frac{dz}{z^{n+1}} = T_p + \eta_p,$$

le produit de chacune des quantités $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p$ par $R^n n^{1+\alpha}$ tendant vers zéro en même temps que $\frac{1}{n}\cdot$ Il en résulte

$$N = A_1T_1 + A_2T_2 + A_3T_3 + \dots + A_pT_p + \eta,$$

le produit $R^n n^{1+\alpha}\eta$ tendant vers zéro en même temps que $\frac{1}{n}\cdot$

Ainsi on peut écrire

$$(27)\qquad M = A_1T_1 + A_2T_2 + A_3T_3 + \dots + A_pT_p + N'_1,$$

le produit $R^n n^{1+\alpha} N'_1$ n'augmentant pas indéfiniment avec n.

En vertu du lemme I, T_1 est de l'ordre de $\frac{1}{R^n}\frac{1}{n^{1+\alpha_1}}$, pour n très grand, T_2 de l'ordre de $\frac{1}{R^n}\frac{1}{n^{1+\alpha_2}}$, etc. M se trouve donc décomposé en un nombre fini de termes qui décroissent de telle sorte que le rapport d'un terme au précédent tend vers zéro en même temps que $\frac{1}{n}\cdot$

On voit ainsi qu'en prenant A_1T_1 comme valeur approchée de M, on commet une erreur de l'ordre de $\frac{1}{R^n}\frac{1}{n^{1+\alpha_2}}\cdot$ On peut écrire

$$M = A_1T_1(1+\varepsilon_2),$$

ε_2 étant infiniment petit de l'ordre de $\frac{1}{n^{\alpha_2-\alpha_1}}\cdot$

Si l'on prend $A_1T_1 + A_2T_2$ comme valeur approchée de M, on

commet une erreur de l'ordre de $\frac{1}{R^n}\frac{1}{n^{1+\alpha_3}}$. On peut écrire

$$M = (A_1 T_1 + A_2 T_2)(1 + \varepsilon_3),$$

ε_3 étant infiniment petit de l'ordre de $\frac{1}{n^{\alpha_3 - \alpha_1}}$, etc.

L'erreur relative commise en prenant pour M sa valeur approchée, lorsque n est un grand nombre, est d'autant plus petite que le nombre de termes pris dans le second membre de l'équation (27) est plus considérable.

Si l'on veut développer M suivant les puissances descendantes de n, il convient de faire usage de l'expression de $\Gamma(n+p)$ donnée à la fin du n° 5, formule qui sera établie plus loin.

Remarque. — En général, la fonction $\psi(z)$ est développable en série de termes composés de puissances positives de $\left(1 - \frac{z}{a}\right)$. On peut, dans cette hypothèse, accroître à volonté l'exposant α et diminuer autant qu'il est nécessaire l'erreur relative commise lorsqu'on prend à la place de M son expression approchée.

9. Généralisation. — Revenons à l'énoncé du théorème III. Il peut se faire que, parmi les points singuliers de $F(z)$ par rapport auxquels le contour est de première espèce, un certain nombre de ces points a, b, ... soient équidistants de l'origine et en même temps plus rapprochés de l'origine que tous les autres.

Chacun de ces points a, b, ... apporte alors un appoint à l'expression approchée de M.

Considérons, pour simplifier, le cas où les points singuliers particuliers dont il est question se réduisent à deux, a et b. Prenons (*fig.* 10) un point D, plus éloigné de l'origine que a et b, et joignons ce point à un point B du contour donné, de façon que le chemin DB sépare les points a et b et ne rencontre aucune singularité de $F(z)$, ce qui est évidemment possible d'après les hypothèses qui ont été faites.

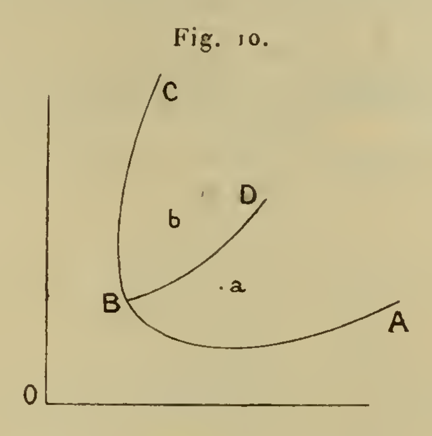
On a identiquement

$$(ABC) = (ABD) + (DBC).$$

Le chemin ABD est de première espèce par rapport au point a et le chemin DBC de première espèce par rapport au point b. Les intégrales (ABD), (DBC) s'évaluent donc d'après la règle que nous avons déduite du théorème II.

Ainsi, pour obtenir l'évaluation approchée de M il faut appliquer la

Fig. 10.



règle donnée au n° **8** à chacun des points singuliers a, b, ... successivement et faire la somme des résultats partiels.

L'ordre de l'erreur commise, lorsqu'on remplace M par cette expression approchée, est égal à l'ordre de l'erreur qu'apporte avec lui le résultat partiel le moins approché.

Le théorème III comprend, en supposant n entier, les résultats auxquels est arrivé M. Flamme, dans sa thèse de doctorat, par des considérations entièrement différentes.

10. De ce qui précède nous allons tirer quelques conséquences, en supposant n entier.

Supposons que l'intégrale (22) soit prise, dans le sens direct, le long d'un contour fermé C (*fig.* 11) entourant l'origine, et admettons que la fonction $F(z)$ reprenne sa valeur lorsque la variable, après avoir décrit le contour en entier, revient au point de départ. Soit a l'affixe du point singulier de $F(z)$ extérieur au contour C, le plus rapproché de l'origine.

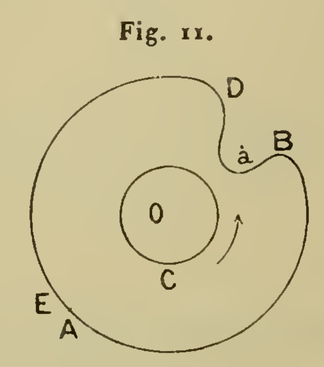
L'évaluation approchée de M, pour n très grand, s'obtient en appliquant au point a la règle exposée au n° **8**.

En effet, $F(z)$ reprenant sa valeur lorsque la variable décrit le contour C en entier, ce contour peut être déformé arbitrairement à con-

dition de ne faire traverser au contour ni l'origine ni aucun point singulier de $F(z)$. En particulier, on peut prendre comme nouveau contour d'intégration une circonférence DEAB, de rayon supérieur à $|a|$, déformée comme il est indiqué sur la figure de façon à laisser le point a à l'extérieur du contour. Le rayon de la circonférence doit d'ailleurs être choisi de façon que les points singuliers de $F(z)$, plus éloignés de l'origine que a, soient à l'extérieur du nouveau contour.

En prenant comme extrémités du contour un point E, A sur la cir-

Fig. 11.



conférence, le contour ABDE est de première espèce, par rapport au point a. La règle donnée au n° **8** est donc applicable. C. Q. F. D.

On raisonnerait de la même façon s'il y avait à l'extérieur du contour C plusieurs points singuliers de $F(z)$ à égale distance de l'origine et plus rapprochés de ce point que les autres singularités de $F(z)$ extérieures au contour C. On doit, dans ce cas, appliquer la règle exposée au n° **9**.

Supposons en particulier que $F(z)$ soit développable par la série de Mac Laurin à l'intérieur d'un cercle de rayon R et admettons que la convergence du développement cesse au delà de ce cercle parce que la fonction possède sur la circonférence un ou plusieurs points singuliers de la nature de ceux qui ont été considérés jusqu'ici. M représente alors le coefficient de z^n dans le développement de $F(z)$. La considération des singularités dont il s'agit permet d'obtenir la valeur approchée de ce coefficient.

C'est cette proposition très importante que M. Darboux a établie dans son Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres et qu'il a appliquée notamment à l'étude des polynomes de la série hypergéométrique.

Si la fonction $F(z)$ est développable, non par la série de Mac Laurin, mais par la série de Laurent à l'intérieur d'une couronne circulaire limitée extérieurement par une circonférence de rayon R, la considération des points singuliers situés sur cette circonférence permettra, comme l'a remarqué M. Flamme, d'obtenir la valeur approchée du coefficient de z^n.

Pour obtenir la valeur approchée du coefficient de $\frac{1}{z^n}$, on posera $z = \frac{1}{z'}$ et l'on cherchera la valeur approchée du coefficient de z'^n.

§ IV.

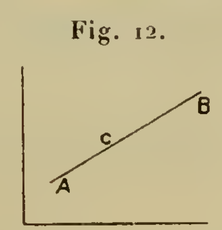
Évaluation approchée des intégrales de la forme $I = \int f(u)\,\varphi^n(u)\,du$.

11. Il convient, avant d'étudier l'intégrale I, de rappeler comment varie le module d'une fonction $\varphi(u)$ dans le voisinage d'un point $u = c$.

Supposons cette fonction holomorphe autour de ce point et non nulle pour $u = c$.

Lorsque $|\varphi'(c)| > 0$, il existe une droite AB (*fig.* 12) passant par c et divisant le plan en deux régions telles que, pour les valeurs de u

Fig. 12.



suffisamment voisines de c, $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$ dans une des régions, et $|\varphi(u)| > |\varphi(c)|$ dans l'autre région.

Lorsque $\varphi'(c) = 0$, il existe deux droites rectangulaires AB, DE passant par c (*fig.* 13) et divisant le plan en quatre régions jouissant des propriétés suivantes : 1° dans les régions comprises à l'intérieur de deux angles opposés par le sommet, DcA, BcE, par exemple, et pour des valeurs de u suffisamment voisines de c, on a

$$|\varphi(u)| > |\varphi(c)|;$$

2° dans les régions comprises à l'intérieur des deux autres angles opposés par le sommet, on a

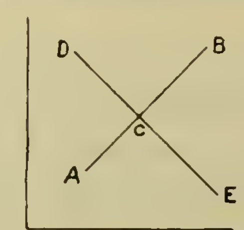
$$|\varphi(u)| < |\varphi(c)|.$$

Lorsque $\varphi(u)$ n'est pas holomorphe, mais peut se mettre, dans le voisinage de c, sous la forme

$$\varphi(u) = \varphi(c) + A_1(u-1)^{\alpha_1} + A_2(u-1)^{\alpha_2} + \ldots \qquad (0 < \alpha_1 < \alpha_2 \ldots),$$

il existe autour du point c des régions dans lesquelles $|\varphi(u)| > |\varphi(c)|$ et d'autres régions dans lesquelles $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$. Nous reviendrons

Fig. 13.



sur ce point un peu plus loin. Ce qu'il importe de retenir pour le moment, c'est que, dans le voisinage du point $u = c$, on peut tracer des chemins partant de c et le long desquels $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$.

12. Étant données deux fonctions $f(u)$ et $\varphi(u)$, nous allons chercher l'expression asymptotique de l'intégrale

$$(28) \qquad I = \int f(u)\,\varphi^n(u)\,du$$

dans les circonstances suivantes : 1° le chemin d'intégration $S = cA$ (*fig.* 14) est limité au point c; 2° le long de ce chemin $|\varphi(u)|$ est inférieur à $|\varphi(c)|$; 3° n est un nombre positif très grand entier ou fractionnaire; 4° la variable d'intégration part du point $u = c$ sur le contour.

Posons

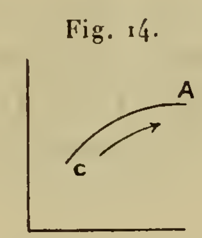
$$z = \frac{1}{\varphi(u)}, \qquad F(z) = -\frac{f(u)}{\varphi'(u)}.$$

L'intégrale proposée [1] se change en

$$I = \int F(z) \frac{dz}{z^{n+2}}, \tag{29}$$

et cette nouvelle intégrale est évidemment égale à la proposée si on la

Fig. 14.



prend le long d'un chemin d'intégration S_1 obtenu en faisant correspondre, dans le plan de la variable z, à chaque point u du contour proposé S un point ayant pour affixe

$$z = \frac{1}{\varphi(u)}.$$

Le long du chemin S, on a $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$; on voit donc que le chemin S_1 part du point $z = \frac{1}{\varphi(c)}$ et que tous ses points sont plus éloignés de l'origine des z que le point $\frac{1}{\varphi(c)}$. Le contour S_1 est donc de troisième espèce par rapport au point $z = \frac{1}{\varphi(c)}$. Nous sommes ainsi ramenés, pour trouver l'expression asymptotique de l'intégrale (28), à appliquer le théorème I à l'intégrale (29), ce qui nécessite la connaissance du développement de la fonction $F(z)$ dans le voisinage du point $z = \frac{1}{\varphi(c)}$.

Premier cas. — Les fonctions $f(u)$ et $\varphi(u)$ sont holomorphes, dans le voisinage de la valeur $u = c$, et c est racine de l'équation $\varphi'(u) = 0$.

Nous nous appuierons sur un résultat concernant la série de Lagrange [2], pour obtenir le développement de $F(z)$.

---

[1] Ce changement de variable a été indiqué par M. Flamme (*loc. cit.*) à propos de l'intégrale dont il sera question au n° 13; il n'en a d'ailleurs fait aucune application.

[2] M. Hamy, *Sur une extension de la série de Lagrange* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1re Partie, 1896, p. 213).

Étant données l'équation

$$(30) \qquad u - c - \nu\chi(u) = 0,$$

où $\chi(u)$ est une fonction holomorphe dans le voisinage du point c, et une fonction $\Phi(u)$ uniforme autour du point c, admettant la valeur $u = c$ comme pôle simple, si l'on désigne par ζ la racine de l'équation (30) qui se réduit à c pour $\nu = 0$, on a, pour des valeurs finies de ν dont le module est inférieur à une quantité finie convenablement choisie,

$$(31) \qquad \Phi(\zeta) = \frac{A}{\nu\chi(c)} + \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\nu^p}{(p+1)!}\frac{d^p}{du^p}\left[\chi^{p+1}(u)\frac{d}{du}\frac{(u-c)\Phi(u)}{\chi(u)}\right]_{u=c}.$$

A désigne le résidu de la fonction $\Phi(u)$ relatif au pôle c; on doit d'ailleurs faire $u = c$ après avoir effectué les dérivations indiquées.

Revenons à notre objet. Convenons de remplacer, pour simplifier l'écriture, $\varphi(c)$, $\varphi''(c)$, $\varphi'''(c)$, ... par $\underset{1}{\varphi}$, $\underset{1}{\varphi}''$, $\underset{1}{\varphi}'''$, ..., et de même $f(c)$, $f'(c)$, $f''(c)$ par $\underset{1}{f}$, $\underset{1}{f}'$, $\underset{1}{f}''$, ...

De l'équation

$$z = \frac{1}{\varphi(u)}$$

on tire

$$z\underset{1}{\varphi} - 1 = \frac{\underset{1}{\varphi} - \varphi(u)}{\varphi(u)} = -\frac{\underset{1}{\varphi}''}{2\underset{1}{\varphi}}(u-c)^2 \frac{1 + \frac{\underset{1}{\varphi}'''}{\underset{1}{\varphi}''}\frac{(u-c)}{3} + \frac{\underset{1}{\varphi}^{\text{IV}}}{\underset{1}{\varphi}''}\frac{(u-c)^2}{3.4} + \frac{\underset{1}{\varphi}^{\text{V}}}{\underset{1}{\varphi}''}\frac{(u-c)^3}{3.4.5} + \ldots}{\frac{1}{\underset{1}{\varphi}}\varphi(u)}$$

et ensuite

$$(32) \qquad u - c = \sqrt{-\frac{2\underset{1}{\varphi}}{\underset{1}{\varphi}''}}\sqrt{z\underset{1}{\varphi} - 1}\left[\frac{\frac{1}{\underset{1}{\varphi}}\varphi(u)}{1 + \frac{\underset{1}{\varphi}'''}{\underset{1}{\varphi}''}\frac{u-c}{3} + \frac{\underset{1}{\varphi}^{\text{IV}}}{\underset{1}{\varphi}''}\frac{(u-c)^2}{3.4} + \frac{\underset{1}{\varphi}^{\text{V}}}{\underset{1}{\varphi}''}\frac{(u-c)^3}{3.4.5} + \ldots}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

En posant

$$\sqrt{-\frac{2\underset{1}{\varphi}}{\underset{1}{\varphi}''}}\sqrt{z\underset{1}{\varphi} - 1} = \nu,$$

$$\chi(u) = \left[\frac{\frac{1}{\underset{1}{\varphi}}\varphi(u)}{1 + \frac{\underset{1}{\varphi}'''}{\underset{1}{\varphi}''}\frac{u-c}{3} + \frac{\underset{1}{\varphi}^{\text{IV}}}{\underset{1}{\varphi}''}\frac{(u-c)^2}{3.4} + \frac{\underset{1}{\varphi}^{\text{V}}}{\underset{1}{\varphi}''}\frac{(u-c)^3}{3.4.5} + \ldots}\right]^{\frac{1}{2}},$$

l'équation (32) devient

$$u - c - \nu\chi(u) = 0.$$

On peut convenir de prendre comme détermination de $\chi(u)$ celle qui se réduit à 1 pour $u - c = 0$, en rejetant sur ν la double détermination du produit $\nu\chi(u)$ qui a été introduite en extrayant la racine carrée. On peut de même choisir, à volonté, l'argument de $(z\varphi - 1)^{\frac{1}{2}}$ dans l'expression de ν, en rejetant sur le radical $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$ le double déterminant de ν.

Il suffit maintenant de remplacer, dans l'équation (31), $\chi(u)$ par sa valeur et le produit $(u-c)\Phi(u)$ par

$$(u-c)\Phi(u) = -\frac{f(u)}{\varphi'' + \frac{\varphi'''}{1.2}(u-c) + \frac{\varphi^{\text{IV}}}{1.2.3}(u-c)^2 + \dots}$$

pour obtenir le développement de $F(z)$ dans le voisinage du point $z = \frac{1}{\varphi}$.

Le résidu A de $\Phi(u)$ relatif au pôle c étant

$$A = -\frac{f}{\varphi''},$$

on a, puisque $\chi(c) = 1$,

$$(33)\quad F(z) = -\frac{f}{\varphi''}\nu^{-1} - \sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{\nu^p}{(p+1)!}\frac{d^p}{du^p}\cdot\left\{\left[\frac{\frac{1}{\varphi}\varphi(u)}{1+\frac{\varphi'''}{\varphi''}\frac{u-c}{3}+\frac{\varphi^{\text{IV}}}{\varphi''}\frac{(u-c)^2}{3.4}+\frac{\varphi^{\text{V}}}{\varphi''}\frac{(u-c)^3}{3.4.5}+\dots}\right]^{p+\frac{1}{2}} \times \frac{d}{du}\frac{\dfrac{f(u)}{\varphi''+\frac{\varphi'''}{1.2}(u-c)+\frac{\varphi^{\text{IV}}}{1.2.3}(u-c)^2+\dots}}{\left[\dfrac{\frac{1}{\varphi}\varphi(u)}{1+\frac{\varphi'''}{\varphi''}\frac{u-c}{3}+\frac{\varphi^{\text{IV}}}{\varphi''}\frac{(u-c)^2}{3.4}+\frac{\varphi^{\text{V}}}{\varphi''}\frac{(u-c)^3}{3.4.5}+\dots}\right]^{\frac{1}{2}}}\right\}_{u=c}$$

Il est à remarquer que le coefficient de ν^p est une fonction linéaire et homogène des dérivées $f, f', f'', \ldots, f^{p+1}$.

En calculant les premiers termes, on peut écrire la formule (33)

$$F(z) = -\frac{f}{\varphi''}\nu^{-1} + \frac{f\varphi'''}{3\varphi''^2} - \frac{f'}{\varphi''}$$

$$+\frac{1}{2\varphi''}\left(\frac{f\varphi^{\mathrm{IV}}}{4\varphi''} - \frac{5}{12}\frac{f\varphi'''^2}{\varphi''^2} + \frac{f'\varphi'''}{\varphi''} + \frac{f\varphi''}{2\varphi} - f''\right)\nu$$

+ des termes contenant ν^2 en facteur,

ou, en remplaçant ν par sa valeur,

$$F(z) = -\frac{f}{\varphi''}\frac{1}{\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}}(z\varphi - 1)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{f\varphi'''}{3\varphi''^2} - \frac{f'}{\varphi''}\right)(z\varphi - 1)^0$$

$$+\frac{1}{2\varphi''}\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}\left(\frac{f\varphi^{\mathrm{IV}}}{4\varphi''} - \frac{5}{12}\frac{f\varphi'''^2}{\varphi''^2} + \frac{f'\varphi'''}{\varphi''} + \frac{f\varphi''}{2\varphi} - f''\right)(z\varphi - 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$+(z\varphi - 1)\psi(z),$$

la fonction $\psi(z)$ étant finie dans le domaine de la valeur $z = \frac{1}{\varphi}$.

Nous pouvons maintenant appliquer à l'intégrale (29) la règle établie au n° **5**, en partant de ce développement de $F(z)$.

Dans le cas actuel, $\frac{1}{\varphi}$ joue le rôle de la quantité a du n° **5** et $n+1$ est mis à la place de n.

Puisque nous pouvons choisir la détermination de $(z\varphi - 1)^{\frac{1}{2}}$, nous prendrons celle dont l'argument est inférieur à $\frac{\pi}{4}$, en valeur absolue, pour les points situés sur le contour S_1 dans le voisinage de $z = \frac{1}{\varphi}$. Les arguments des autres puissances de $z\varphi - 1$, figurant dans le développement de $F(z)$, restent dans ces conditions inférieurs en valeur absolue au produit de $\frac{\pi}{2}$ par les exposants de ces puissances.

On trouve maintenant, en appliquant la règle exposée au n° 5,

$$(34)\quad \begin{cases} \mathrm{I} = \int \mathrm{F}(z)\dfrac{dz}{z^{n+2}} \\ = -\dfrac{f}{\varphi''}\dfrac{1}{\sqrt{-\dfrac{2\varphi}{\varphi''}}}\varphi^{n+1}\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+2)} + \left(\dfrac{f\varphi'''}{3\varphi''^2} - \dfrac{f'}{\varphi''}\right)\varphi^{n+1}\dfrac{\Gamma(1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2)} \\ + \dfrac{1}{2\varphi''}\sqrt{-\dfrac{2\varphi}{\varphi''}}\left(\dfrac{f\varphi^{\text{IV}}}{4\varphi''} - \dfrac{5}{12}\dfrac{f\varphi'''^2}{\varphi''^2} + \dfrac{f\varphi'''}{\varphi''} + \dfrac{f\varphi''}{2\varphi} - f''\right)\varphi^{n+1} \\ \qquad\qquad \times \dfrac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+2)}(1+\varepsilon), \end{cases}$$

ε étant, pour n très grand, de l'ordre de $\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$.

En admettant la formule suivante, où n désigne un grand nombre positif et ϖ un nombre fini quelconque,

$$\Gamma(n+\varpi) = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{E}^{-n} n^{n+\varpi-\frac{1}{2}}\left\{1 + \frac{1}{12n}[1 + 6\varpi(\varpi-1)] + \frac{1}{n^2}(\;) + \ldots\right\},$$

que nous établirons plus loin [formule (43)], on peut ordonner l'expression de I suivant les puissances descendantes de n; il vient

$$(34')\quad \begin{cases} \mathrm{I} = \varphi^n\left\{\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}\sqrt{-\dfrac{2\varphi}{\varphi''}}\dfrac{f}{2} + \dfrac{1}{n}\dfrac{\varphi}{\varphi''}\left(\dfrac{f\varphi'''}{3\varphi''} - f'\right)\right. \\ \left. + \dfrac{\sqrt{\pi}}{4n^{\frac{3}{2}}}\sqrt{-\dfrac{2\varphi}{\varphi''}}\left[-\dfrac{3}{4}f + \dfrac{\varphi}{\varphi''}\left(\dfrac{1}{4}\dfrac{f\varphi^{\text{IV}}}{\varphi''} - \dfrac{5}{12}\dfrac{f\varphi'''^2}{\varphi''^2} + \dfrac{f'\varphi'''}{\varphi''} - f''\right)\right](1+\varepsilon)\right\}. \end{cases}$$

Il reste à fixer la détermination du radical $\sqrt{-\dfrac{2\varphi}{\varphi''}}$. Or, entre l'affixe u d'un point infiniment voisin du point c pris sur le contour donné S et l'affixe z du correspondant de ce point sur le contour S_1, on a, d'après l'équation (32),

$$u - c = \sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}\sqrt{z\varphi - 1}.$$

On en déduit, à un multiple de 2π près,

$$\text{argument de } (u-c) = \text{argument de } \sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}} + \text{argument de } \sqrt{z\varphi-1}.$$

L'argument de $u-c$ est égal à l'angle Θ que fait la tangente menée au point c au contour donné S, dans le sens de l'intégration cA (*fig.* 14), avec l'axe des abscisses, cet angle étant compté dans le sens des arguments croissants.

D'autre part, l'argument de $\sqrt{z\varphi-1}$ est inférieur à $\frac{\pi}{4}$ en valeur absolue. On peut donc écrire, en appelant λ un nombre compris entre -1 et $+1$,

$$\text{argument de } \sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}} = \Theta + \lambda\frac{\pi}{4}.$$

La partie réelle de $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$ a donc le signe de $\cos\left(\Theta+\lambda\frac{\pi}{4}\right)$ et la partie imaginaire le signe de $\sin\left(\Theta+\lambda\frac{\pi}{4}\right)$.

Or, $\cos\left(\Theta+\lambda\frac{\pi}{4}\right)$ restant positif, quelle que soit la valeur de λ, lorsque Θ est compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $+\frac{\pi}{4}$, on voit que la partie réelle de $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$ est alors positive.

Si Θ est compris entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$, c'est $\sin\left(\Theta+\lambda\frac{\pi}{4}\right)$ qui est positif; la partie imaginaire de $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$ est donc positive.

Si Θ est compris entre $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$, la partie réelle de $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$ est négative.

Si Θ est compris entre $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$, la partie imaginaire de $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$ est négative.

Remarque. — Supposons l'intégrale proposée fonction d'un paramètre qui n'entre que dans $f(z)$. En différentiant la fonction $f(z)$ par rapport à ce paramètre, sous le signe $\int$, on obtient une nouvelle inté-

grale qui est la dérivée de la proposée par rapport au paramètre. Le développement de cette dérivée, suivant les puissances de $\frac{1}{n}$, s'obtient en différentiant terme à terme le second membre de la formule (34).

Cette proposition résulte sur-le-champ de ce que les coefficients des différentes puissances de $\frac{1}{n}$ dans la formule (34) sont des fonctions linéaires de $f, f', f'', \ldots$.

Deuxième cas. — Considérons maintenant le cas plus général où l'on a, dans le voisinage du point $u = c$,

$$(35) \qquad \begin{cases} f(u) = B_1(u-c)^{\beta_1} + B_2(u-c)^{\beta_2} + \ldots, \\ \varphi(u) = \varphi(c) + A_1(u-c)^{\alpha_1} + A_2(u-c)^{\alpha_2} + \ldots, \end{cases}$$

les exposants β_1, β_2, ... étant rangés par ordre de grandeurs croissantes, ainsi que α_1, α_2, ..., ces derniers exposants étant de plus positifs, les A et les B représentant d'ailleurs des constantes.

En désignant, pour simplifier, $\varphi(c)$ par φ, on tire de là

$$z = \frac{1}{\varphi(u)} = \frac{1}{\varphi}\left[1 - \frac{A_1}{\varphi}(u-c)^{\alpha_1} + \ldots\right].$$

En posant

$$(36) \qquad \nu = -\frac{\varphi}{A_1}(z\varphi - 1),$$

l'équation qui précède devient

$$\nu = (u-c)^{\alpha_1} + \ldots.$$

On en tire, par la méthode des approximations successives ou celle des coefficients indéterminés,

$$(37) \qquad u - c = \nu^{\frac{1}{\alpha_1}} + \ldots.$$

Or, on a

$$(38) \qquad F(z) = -\frac{f(u)}{\varphi'(u)} = -\frac{B_1}{\alpha_1 A_1}(u-c)^{\beta_1+1-\alpha_1} + \ldots.$$

En remplaçant $u - c$ par sa valeur (37),

$$F(z) = -\frac{B_1}{\alpha_1 A_1} \nu^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1} + \dots$$

ou

$$(39) \quad F(z) = -\frac{B_1}{\alpha_1 A_1}\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1}(z\varphi - 1)^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1}[1 + \dots].$$

Les termes non écrits entre crochets sont formés de puissances positives de $z\varphi - 1$, le plus faible exposant h de ces termes étant le plus petit des nombres

$$\frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_1}, \quad \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1}, \quad 1.$$

Il est à remarquer que, si l'on avait posé

$$\nu = \frac{\varphi}{A_1}(1 - z\varphi),$$

on aurait remplacé, dans le développement (37) de $F(z)$, $u - c$ par

$$u - c = \left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}(1 - z\varphi)^{\frac{1}{\alpha_1}} + \dots,$$

et l'on serait arrivé à l'expression

$$(39') \quad F(z) = -\frac{B_1}{\alpha_1 A_1}\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}(1 - z\varphi)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}[1 + \dots].$$

Nous nous servirons plus loin de cette seconde forme du développement de $F(z)$.

Dans la formule (39), on peut prendre une détermination quelconque du binome $(z\varphi - 1)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}$, à condition de choisir, en conséquence, la détermination du facteur $\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}$.

Nous pouvons maintenant appliquer à notre intégrale (28), supposée mise sous la forme

$$I = \int F(z)\frac{dz}{z^{n+2}},$$

la règle établie au n° 5, en partant de l'expression (39) de $F(z)$ dans le voisinage du point $z = \frac{1}{\varphi}$.

Dans le cas actuel, $\frac{1}{\varphi}$ tient lieu de la quantité a du n° 5 et $n+1$ est mis à la place de n.

Puisque nous pouvons choisir la détermination de $(z\varphi - 1)^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1}$ dans le développement de $F(z)$, prenons celle dont l'argument est inférieur à $\left(\frac{\beta_1+1}{\alpha_1} - 1\right)\frac{\pi}{2}$ pour les points du contour d'intégration très près du point $z = \frac{1}{\varphi}$. Dans ces conditions, en appliquant la règle, il vient

$$I = \int F(z)\frac{dz}{z^{n+2}}$$
$$= -\frac{B_1}{\alpha_1 A_1}\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1}\varphi^{n+1}\frac{\Gamma\left(\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}\right)\Gamma\left(n+2-\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}\right)}{\Gamma(n+2)}(1+\varepsilon),$$

ε étant de l'ordre de $\frac{1}{n^h}$.

Cette formule peut encore s'écrire, en développant les fonctions Γ comme pour la formule (34),

$$(40) \qquad I = \frac{B_1}{\alpha_1}\left(-\frac{\varphi(c)}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}}\varphi^n(c)\frac{\Gamma\left(\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}\right)}{n^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}}}(1+\varepsilon).$$

Il reste à fixer la détermination du facteur $\left(-\frac{\varphi(c)}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}}$ ou, si l'on veut, la détermination de $\left(-\frac{\varphi(c)}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1}$.

Désignons, comme plus haut, par Θ l'angle inférieur à 2π que fait, avec l'axe des abscisses, la tangente menée au point c au contour donné S, dans le sens de l'intégration cA (*fig.* 14), cet angle étant compté dans le sens des arguments croissants.

Supposons les constantes A et B des développements (35) déterminées de telle sorte que les arguments de $(u-c)^{\beta_1}$, $(u-c)^{\beta_2}$, ...,

$(u-c)^{\alpha_1}$, $(u-c)^{\alpha_2}$, ... aient respectivement pour valeur $\beta_1\Theta$, $\beta_2\Theta$, ..., $\alpha_1\Theta$, $\alpha_2\Theta$, ... lorsque u est infiniment voisin du point c sur le contour S.

En supposant z infiniment voisin de $\frac{1}{\varphi}$, sur le contour S_1, et infiniment voisin de c, sur le contour S, on a fait, dans le développement de $F(z)$ [formules (36), (37), (38) et (39)],

$$u-c=\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}(z\varphi-1)^{\frac{1}{\alpha_1}},$$

$$(u-c)^{\beta_1+1-\alpha_1}=\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}(z\varphi-1)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}.$$

Nous pouvons donc écrire la relation suivante entre les arguments, à un multiple de 2π près,

$$\arg.(u-c)=\arg.\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}+\arg.(z\varphi-1)^{\frac{1}{\alpha_1}},$$

$$\arg.(u-c)^{\beta_1+1-\alpha_1}=\arg.\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}+\arg.(z\varphi-1)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}},$$

ou, puisque l'argument de $z\varphi-1$ est inférieur à $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue, le long du contour S, dans le voisinage du point c,

$$\arg.\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}=(\beta_1+1-\alpha_1)\Theta+\lambda\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}\frac{\pi}{2},$$

λ étant compris entre -1 et $+1$.

Cette égalité permet de choisir, sans ambiguïté, l'argument

$$\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}.$$

L'argument à prendre est celui qui s'approche le plus de

$$(\beta_1+1-\alpha_1)\Theta,$$

puisque deux arguments de $\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}$ diffèrent d'au moins

$$\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}2\pi.$$

Si l'on voulait avoir une valeur de I plus approchée que celle que nous avons obtenue, il faudrait pousser plus loin le développement (39) de $F(z)$, le sens des facteurs susceptibles de plusieurs déterminations s'obtenant toujours par la règle qui vient d'être établie.

Cas particulier. — Un cas particulier intéressant se présente lorsque, $\varphi(u)$ étant holomorphe dans le voisinage du point $u = c$, sans que $\varphi'(c)$ soit nul, on a, dans le voisinage de c,

$$f(u) = (u-c)^\beta[B_1 + B_2(u-c) + B_3(u-c)^2 + \ldots].$$

De l'équation $z = \frac{1}{\varphi(u)}$ on tire

$$u - c = -\frac{\varphi}{\varphi'}(z\varphi - 1)\left[1 - \left(1 - \frac{\varphi\varphi''}{2\varphi'^2}\right)(z\varphi - 1) + \ldots\right].$$

On a, d'ailleurs,

$$-\frac{f(u)}{\varphi'(u)} = (u-c)^\beta\left[-\frac{B_1}{\varphi'} + \left(B_1\frac{\varphi''}{\varphi'^2} - \frac{B_2}{\varphi'}\right)(u-c) + \ldots\right],$$

et l'on en conclut

$$F(z) = \left(-\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^\beta (z\varphi - 1)^\beta \frac{1}{\varphi'}$$
$$\times\left\{-B_1 - \left[B_1\left(\frac{\beta+2}{2}\frac{\varphi\varphi''}{\varphi'^2} - \beta\right) - \frac{\varphi}{\varphi'}B_2\right](z\varphi - 1) + \ldots\right\}.$$

Appliquant la règle donnée au nº **5**, il vient

$$I = \int f(z)\varphi^n(z)\,dz$$
$$= \left(-\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^{\beta+1}\varphi^n\,\Gamma(\beta+1)\left\{B_1\frac{\Gamma(n+1-\beta)}{\Gamma(n+2)}\right.$$
$$+\left[B_1\left(\frac{\beta+2}{2}\frac{\varphi\varphi''}{\varphi'^2} - \beta\right) - \frac{\varphi}{\varphi'}B_2\right]$$
$$\left.\times\frac{(\beta+1)\Gamma(n-\beta)}{\Gamma(n+2)} + \ldots\right\},$$

ou, en développant les fonctions Γ suivant les puissances descendantes

de n, comme nous l'avons déjà fait pour la formule (34),

$$(41)\qquad I = \left(-\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^{\beta+1} \varphi'' \frac{\Gamma(\beta+1)}{n^{\beta+1}} \left\{ B_1 + \frac{\beta+1}{n} \left[\frac{\beta+2}{2} \left(\frac{\varphi\varphi''}{\varphi'^2} - 1 \right) B_1 - \frac{\varphi}{\varphi'} B_2 \right] + \ldots \right\},$$

les termes négligés entre crochets contenant $\frac{1}{n^2}$ en facteur.

Si l'on suppose que la détermination du facteur $(u-c)^\beta$, qui figure dans le développement de $f(z)$, correspond au plus petit argument positif de $u-c$, et si l'on appelle Θ le plus petit angle positif que fait avec la direction positive de l'axe des abscisses la demi-tangente au contour d'intégration, menée au point $u=c$, du côté de ce contour, la détermination du facteur $\left(-\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^\beta$, qui rentre dans l'expression de I, est celle dont l'argument diffère le moins du produit $\beta\Theta$. Cette expression de I suppose essentiellement d'ailleurs, comme nous l'avons dit au commencement du n° **12**, que le point de départ de la variable d'intégration, sur le contour, est le point $u=c$.

13. Nous nous proposons maintenant de chercher la valeur approchée de l'intégrale $I = \int f(u)\varphi''(u)\,du$ lorsque l'on ne peut déformer le contour d'intégration, de façon que $|\varphi(u)|$, le long de ce contour, prenne sa plus grande valeur à l'une de ses extrémités.

Premier cas. — Nous supposerons d'abord que l'on puisse faire passer le contour d'intégration par un point $u=c$, dans le voisinage duquel $f(u)$ et $\varphi(u)$ sont holomorphes et tel que $|\varphi(c)|$ soit la plus grande valeur de $|\varphi(u)|$, le long du nouveau contour, c étant en outre racine simple de $\varphi'(u)$.

La question ainsi posée est loin d'être nouvelle. Elle a été étudiée, pour la première fois, par Laplace, par des procédés peu rigoureux (*Calcul des probabilités*), dans le cas des intégrales de variables réelles. M. Darboux (*loc. cit.*) a cependant confirmé le résultat de Laplace et l'a étendu au cas des intégrales de variables complexes.

Nous reprenons ici l'étude de ce problème, à cause de son importance. La voie que nous allons suivre, pour en obtenir la solution, est entièrement nouvelle et à l'abri de toute critique.

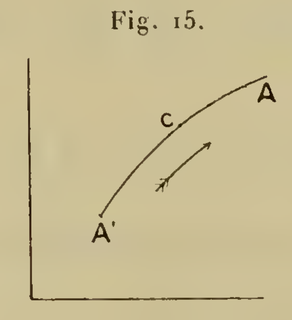
Soit $A'cA$ le chemin d'intégration, tracé dans le plan de la variable u; on a

$$I = \int f(u)\,\varphi^n(u)\,du = (A'cA) = (cA) - (cA'),$$

et chacune des intégrales qui figurent au dernier membre de cette égalité rentre dans la catégorie étudiée au nº **12**.

Or, si l'on se reporte au changement de variable qui a conduit à

Fig. 15.



l'équation (32), on voit que, pour u infiniment voisin de c et, par suite, z infiniment voisin de $\frac{1}{\varphi}$, on a la relation

$$u - c = \sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}\sqrt{z\varphi - 1}.$$

De là il résulte que si l'on adopte un certain argument pour $\sqrt{z\varphi - 1}$, en partant du point $z = \frac{1}{\varphi}$, sur le contour correspondant à cA, on doit adopter un argument différent d'un multiple impair de π, pour ce binome, quand on partira du même point, sur le contour correspondant à cA', puisque $u - c$ change de signe quand on passe du sens cA au sens cA'.

Si donc nous partons sur le contour correspondant à cA avec la détermination de $\sqrt{z\varphi - 1}$, d'argument inférieur à $\frac{\pi}{4}$ en valeur absolue, comme nous l'avons fait pour établir la formule (34), nous devons partir, sur le contour correspondant à cA', avec la détermination dont l'argument diffère de π de celui de la première, c'est-à-dire avec la détermination adoptée tout à l'heure, mais changée de signe.

Si donc on prend pour (cA) la valeur (34), on obtient (cA') en

changeant le signe du radical $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$. Il en résulte

$$(42)\quad \begin{cases} \mathrm{I} = (c\mathrm{A}) - (c\mathrm{A}') \\ \quad = \sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+2)} \\ \quad \times \varphi^n\left[f + \frac{\varphi}{\varphi''}\left(\frac{f\varphi^{\mathrm{IV}}}{4\varphi''} - \frac{5}{12}\frac{f\varphi'''^2}{\varphi''^2} + \frac{f'\varphi'''}{\varphi''} + \frac{f\varphi''}{2\varphi} - f''\right)\frac{1+\varepsilon}{2n+1}\right], \end{cases}$$

ε étant une quantité qui tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment ([1]).

On choisit la détermination du radical $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$, comme il a été dit au n° **12**.

Il reste à développer I, suivant les puissances descendantes de n, en remplaçant $\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)$ et $\Gamma(n+2)$ par leurs valeurs asymptotiques qui se déduisent de l'expression de Stirling. Mais la formule qui vient d'être obtenue peut servir elle-même à trouver ces valeurs asymptotiques. Partons, à cet effet, de

$$\Gamma(q) = \int_0^\infty \mathrm{E}^{-u} u^{q-1}\,du,$$

où E désigne la base des logarithmes népériens.

Changeons q en $n+p$, u en nu, p étant un nombre fini et n un nombre qui peut croître indéfiniment; il vient

$$\frac{\Gamma(n+p)}{n^{n+p}} = \int_0^\infty u^{p-1}(u\mathrm{E}^{-u})^n\,du.$$

([1]) Il est à remarquer que les termes de la formule (34), qui ne contiennent pas $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$ en dénominateur ou en facteur, disparaissent dans la différence $(c\mathrm{A}) - (c\mathrm{A}')$. Les termes dépendant de $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$, qui sont au contraire doublés dans cette différence, proviennent des termes du développement de $\mathrm{F}(z)$ (p. 244) dans lesquels figurent les puissances fractionnaires du binome $z\varphi - 1$.

La fonction $u E^{-u}$ passe par un maximum absolu pour $u = 1$ lorsque u est réel et positif; nous nous trouvons donc dans le cas où la relation trouvée ci-dessus est applicable. En posant $f(u) = u^{p-1}$, $\varphi(u) = u E^{-u}$ et $c = 1$, il faut faire dans l'expression de I

$$f = 1, \qquad \varphi = E^{-1}, \qquad \frac{\varphi}{\varphi''} = -1, \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

$$f' = p - 1, \qquad \frac{\varphi^{IV}}{\varphi''} = 3,$$

$$f'' = (p-1)(p-2), \qquad \frac{\varphi'''}{\varphi''} = -2,$$

On trouve ainsi

$$\frac{\Gamma(n+p)}{n^{n+p}} = \sqrt{2\pi}\,\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+2)}\,E^{-n}\left[1 + \left(\frac{17}{12} + p^2 - p\right)\frac{1}{2n}(1+\varepsilon')\right].$$

Faisant dans cette égalité successivement $p = \frac{3}{2}$, puis $p = 2$, et divisant membre à membre, il vient

$$\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+2)} = n^{-\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{5}{8}\,\frac{1}{n}(1+\varepsilon'')\right].$$

De cette expression on déduit la formule suivante, dont nous avons déjà fait usage au n° **12**, pour passer de la formule (34) à la formule (34),

$$(43) \quad \Gamma(n+p) = \sqrt{2\pi}\,E^{-n} n^{n+p-\frac{1}{2}}\left\{1 + \frac{1}{12n}[1 + 6p(p-1)](1+\varepsilon)\right\},$$

ε tendant vers zéro, lorsque n croît indéfiniment.

On en conclut également

$$(44) \quad I = \sqrt{\frac{-2\varphi}{\varphi''}}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,\varphi^n\left\{f + \frac{1}{2n}\left[-\frac{3}{4}f + \frac{\varphi}{\varphi''}\left(\frac{1}{4}\,\frac{f\varphi^{IV}}{\varphi''} - \frac{5}{12}\,\frac{f\varphi'''^2}{\varphi''^2} + \frac{f'\varphi'''}{\varphi''} - f''\right)\right](1+\varepsilon)\right\},$$

expression dans laquelle le radical $\sqrt{\frac{-2\varphi}{\varphi''}}$ a le sens qui a été défini au n° **12** (p. 246).

Cette formule importante joue un rôle essentiel dans mes recherches sur le développement de la fonction perturbatrice.

Nous avons déjà fait observer que le second membre de la formule (34) qui nous a servi a établir la formule (42) est une fonction linéaire et homogène de f, f', f'', ... L'expression de I à laquelle nous venons d'arriver est donc, elle aussi, une fonction linéaire et homogène de f, f', f'', etc.

Une conséquence importante résulte immédiatement de cette propriété.

Si la fonction $f(u)$ contient un paramètre dont ne dépend ni la fonction $\varphi(u)$, ni la forme du chemin d'intégration, l'évaluation approchée de l'intégrale obtenue en dérivant ou intégrant, sous le signe $\int$, la fonction $f(u)$ un certain nombre de fois par rapport à ce paramètre, cette évaluation, dis-je, s'obtient en dérivant ou intégrant le second membre de la formule (43) autant de fois par rapport à ce paramètre.

Nous nous bornerons à observer que, d'après cette remarque, il est légitime de dériver ou d'intégrer les deux membres de la formule (43) par rapport à p, puisque, dans l'intégrale $\int_0^\infty u^{p-1}(u\mathrm{E}^{-u})^n\,du$ qui nous a servi à évaluer asymptotiquement $\Gamma(n+p)$, le paramètre p n'entre que dans u^{p-1} tenant lieu de la fonction $f(u)$ qui fait partie de l'élément différentiel de l'intégrale (28).

Deuxième cas. — Supposons maintenant que, dans le voisinage d'un point d'affixe $u = c$, on puisse écrire

$$(45)\qquad \begin{cases} f(u) = \mathrm{B}_1(u-c)^{\beta_1} + \mathrm{B}_2(u-c)^{\beta_2} + \ldots, \\ \varphi(u) = \varphi(c) + \mathrm{A}_1(u-c)^{\alpha_1} + \mathrm{A}_2(u-c)^{\alpha_2} + \ldots, \end{cases}$$

β_1, β_2, ... allant en croissant et α_1, α_2, ... désignant des exposants positifs rangés par ordre de grandeur croissante.

Imaginons qu'on puisse déformer le contour C, le long duquel est prise l'intégrale

$$(46)\qquad \mathrm{I} = \int f(u)\,\varphi^n(u)\,du,$$

de manière à le faire passer par le point c, et supposons que ce nouveau contour C_1 jouisse des propriétés suivantes : 1° ce contour serait équivalent au contour donné, si le point $u = c$ n'était pas un point singulier de $f(u)$ et de $\varphi(u)$; 2° la plus grande valeur de $|\varphi(u)|$ le long du contour C_1 est $|\varphi(c)|$.

Dans ces conditions, la considération de ce point $u = c$ conduit souvent à l'évaluation asymptotique de l'intégrale I pour n très grand.

Il convient, avant d'étudier le problème, de se rendre compte de la façon dont varie $|\varphi(u)|$ dans le voisinage du point $u = c$.

Posons, à cet effet,

$$u - c = r\mathrm{E}^{i\zeta}, \qquad \varphi(c) = \alpha + i\beta, \qquad \mathrm{A}_1 = \gamma + i\delta,$$

r étant très petit. On en déduit, pour u très voisin de c,

$$|\varphi(u)| = |\varphi(c)| + \frac{r^{\alpha_1}}{|\varphi(c)|}[(\alpha\gamma + \beta\delta)\cos\alpha_1\zeta + (\beta\gamma - \alpha\delta)\sin\alpha_1\zeta] + \ldots.$$

Les racines de l'expression entre crochets sont fournies par une équation en $\operatorname{tang}\alpha_1\zeta$. Si donc $\zeta = \zeta_1$ est une racine, les autres sont fournies par la relation

$$\zeta = k\frac{\pi}{\alpha_1} + \zeta_1.$$

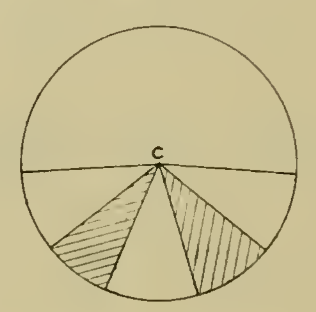
Marquons, sur la circonférence de rayon r décrite du point $u = c$ comme centre, les points correspondant à ces racines; joignons, ensuite, ces points de division au point $u = c$. Nous divisons ainsi l'aire du cercle en secteurs tels que, pour tous les points compris dans un même secteur, la différence $|\varphi(u)| - |\varphi(c)|$ conserve un signe constant. De plus, si $|\varphi(u)| > |\varphi(c)|$ dans un secteur, on a $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$ dans les secteurs qui le comprennent. Enfin, dans un secteur où $|\varphi(u)| > |\varphi(c)|$, le point de la circonférence (r), où $|\varphi(u)|$ est maximum, se trouve sur la bissectrice de ce secteur; dans un secteur où $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$, le point de la circonférence (r), où $|\varphi(u)|$ est minimum, se trouve également sur la bissectrice de ce secteur.

Revenons à l'intégrale proposée et figurons un certain nombre de

secteurs autour du point c, en couvrant de hachures ceux dans lesquels $|\varphi(u)| > |\varphi(c)|$.

Dans ces conditions, les deux branches du contour C_1, séparées par le point c, passent nécessairement à travers les secteurs non hachurés pour atteindre le point c. D'autre part, pour que le contour C_1 devienne équivalent au contour C, pour l'intégrale proposée, il faut lui faire subir une déformation infiniment petite dans le voisinage du point $u = c$. On peut, par exemple, arrêter les deux branches du contour C_1, séparées par le point $u = c$, à une distance infiniment

Fig. 16.



petite de ce point et raccorder ces deux branches par un arc de cercle σ, de rayon infiniment petit, ayant son centre en c. Nous désignerons par C_2 ce nouveau contour qui est équivalent à C.

Il y a lieu de considérer plusieurs hypothèses :

Ou bien l'arc de cercle σ sous-tend un angle inférieur à $\frac{\pi}{\alpha_1}$ et il arrive alors nécessairement que le contour C_2, dans le voisinage du point c, se trouve dans un même secteur non hachuré ;

Ou bien l'arc de cercle σ sous-tend un angle compris entre $\frac{\pi}{\alpha_1}$ et $\frac{3\pi}{\alpha_1}$, et il arrive alors nécessairement que l'arc σ traverse complètement un secteur hachuré et un seul ;

Ou bien l'arc de cercle σ sous-tend un angle supérieur à $\frac{3\pi}{\alpha_1}$ et il arrive alors nécessairement que l'arc σ traverse complètement plusieurs secteurs hachurés.

Nous allons examiner successivement ces trois hypothèses :

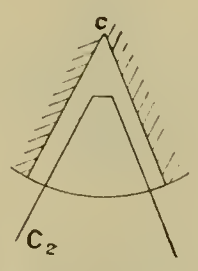
1° Dans la première hypothèse, $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$ le long du contour C_2 (*fig.* 17).

Or, si l'on fait la transformation $\varphi(u) = \frac{1}{z}$, l'intégrale proposée est ramenée à la forme

$$(47) \qquad I = \int F(z) \frac{dz}{z^{n+2}},$$

et cette nouvelle intégrale doit être prise, comme nous l'avons déjà expliqué, le long du contour correspondant au contour C_2, dans le

Fig. 17.



plan de la variable z. D'après l'inégalité $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$, ce contour correspondant est de seconde espèce par rapport au point $z = \frac{1}{\varphi(c)}$, correspondant du point $u = c$. Ce point ne peut donc pas fournir la valeur approchée de l'intégrale.

2° Les choses se passent d'une manière toute différente dans la seconde hypothèse.

Figurons, en effet, les deux secteurs dans lesquels passent les deux branches du contour C_1 et le secteur intermédiaire, à l'intérieur duquel $|\varphi(u)| > |\varphi(c)|$ (*fig.* 18).

Du point c comme centre, avec un rayon inférieur à r, décrivons un arc de cercle $\sigma = BB'$ limité aux bissectrices des secteurs non hachurés, à l'intérieur desquels $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$. Nous pouvons d'abord déformer le contour C_1 à l'intérieur de l'aire des secteurs limités par la circonférence r, de façon à le faire passer par les points B et B'.

Remplaçant ensuite la partie BCB' de ce contour par l'arc BB', nous obtenons le contour C_2 équivalent au contour C_1 pour l'intégrale proposée.

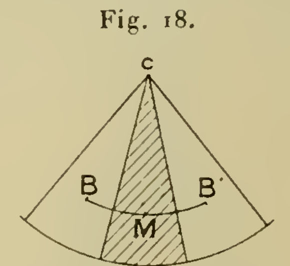
Si nous posons maintenant

$$\varphi(u) = \frac{1}{z},$$

pour ramener l'intégrale proposée à la forme (47), il est aisé de voir que le contour correspondant au contour C_2, dans le plan de la variable z, est un contour de première espèce par rapport au point $z = \frac{1}{\varphi(c)}$, correspondant du point $u = c$.

En effet, les différentes parties du contour C_2, autres que BB′, se transforment, dans le plan de la variable z, en deux chemins D et D′

Fig. 18.



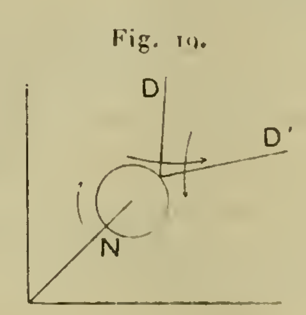
(*fig.* 19) plus éloignés de l'origine que le point $z = \frac{1}{\varphi(c)}$, à cause de l'inégalité $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$. D'autre part, quand la variable u suit le chemin BB′, l'argument de $u - c$ varie de $\frac{2\pi}{\alpha_1}$, puisque l'angle de chaque secteur est $\frac{\pi}{\alpha_1}$, et l'argument de $1 - z\varphi$ varie de 2π, comme il résulte de la relation

$$(48) \qquad u - c = \left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}} (1 - z\varphi)^{\frac{1}{\alpha_1}},$$

que l'on a rencontrée à propos de la formule (39′).

Nos chemins D et D′ sont donc reliés par un arc de cercle qui enve-

Fig. 19.



loppe entièrement le point $z = \frac{1}{\varphi}$, comme l'indique la figure 19, et le contour formé est bien de première espèce par rapport à ce point.

Nous pouvons donc trouver la valeur approchée de I, pour n très

grand, en partant du développement (39′) de $F(z)$ dans le voisinage du point $z = \frac{1}{\varphi}$ et appliquant les considérations développées au n° **8**.

On peut donc écrire

$$(49)\quad I = -2i\pi \frac{B_1}{\alpha_1 A_1}\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1} \varphi^{n+1} \times \frac{\Gamma\left(n - \frac{\beta_1+1}{\alpha_1} + 2\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}+1\right)\Gamma(n+2)}(1+\varepsilon),$$

ε tendant vers zéro lorsque n augmente indéfiniment.

Cette formule suppose, d'ailleurs, le sens de l'intégration tel que la variable z tourne dans le sens rétrograde autour du point $z = \frac{1}{\varphi(z)}$. S'il en était autrement, on devrait changer de signe le second membre. Or, la formule (48) permet de déterminer ce sens, connaissant le contour C_2 dans le plan de la variable u. En effet, α_1 étant positif, la variable z tourne autour du point $z = \frac{1}{\varphi}$ dans le même sens que la variable u autour du point c, puisque, quand l'argument de $u - c$ varie dans un sens, l'argument de $(1 - z\varphi)^{\frac{1}{\alpha_1}}$ varie nécessairement de la même quantité, dans le même sens.

Il reste à fixer la détermination du facteur $\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1}$, pour donner un sens précis à l'expression (49) de I. A cet effet, il faut remarquer que, pour obtenir le développement (39′) de $F(z)$, en supposant u infiniment voisin de c et z infiniment voisin de $\frac{1}{\varphi(c)}$, on a fait

$$(u-c)^{\beta_1+1-\alpha_1} = \left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}(1 - z\varphi)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}.$$

Admettons que les coefficients des développements (45) aient été calculés de telle sorte que les arguments de $(u-c)^{\alpha_1}$, $(u-c)^{\alpha_2}$, ..., $(u-c)^{\beta_1}$, $(u-c)^{\beta_2}$, ... s'obtiennent en multipliant respectivement par α_1, α_2, ..., β_1, β_2, ... le plus petit argument positif Θ de $u - c$. On peut écrire, à un multiple près de 2π, d'après l'identité que nous

venons de rappeler,

$$(\beta_1 + 1 - \alpha_1)\Theta = \text{arg. de}\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}} + \text{arg. de}(1 - z\varphi)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}.$$

Considérons le point M (*fig.* 18), milieu de l'arc BB'. C'est en ce point du contour C_2, tracé dans le plan de la variable u, que $|\varphi(u)|$ prend sa plus grande valeur.

A ce point M correspond donc, dans le plan de la variable z, le point N où le contour correspondant à C_2 est rencontré par le segment de droite joignant l'origine au point $z = \frac{1}{\varphi(c)}$.

Or, l'application du théorème III, exposée au n° **8**, suppose essentiellement que la détermination de $(1 - z\varphi)^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1}$, qui figure dans le développement de $F(z)$, soit réelle et positive au point N. En prenant égal à zéro l'argument de $1 - z\varphi$ en ce point et appelant Θ_0 la valeur de Θ au point M, nous devons donc avoir, à un multiple de 2π près,

$$(\beta_1 + 1 - \alpha_1)\Theta_0 = \text{arg. de}\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}},$$

ce qui définit complètement le sens du facteur $\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1}$.

Mais on peut fixer autrement cette détermination.

En effet, les points pour lesquels $|\varphi(u)| > |\varphi(c)|$ étant nécessairement à l'intérieur du secteur couvert de hachures, si l'on appelle Θ_1 le plus petit argument positif de $u - c$ relatif à l'un d'eux, Θ_1 diffère de Θ_0 d'une quantité moindre en valeur absolue que $\frac{\pi}{2\alpha_1}$. La règle donnée, pour trouver l'argument de $\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}$, est par suite équivalente à la suivante. On peut dire que l'argument de ce facteur, qu'il convient de choisir, est celui qui diffère de $(\beta_1 + 1 - \alpha_1)\Theta_1$ d'une quantité moindre, en valeur absolue, que $\frac{\beta_1 + 1 - \alpha_1}{\alpha_1}\frac{\pi}{2}$.

3° Examinons, enfin, la troisième hypothèse correspondant au cas où l'arc σ traverse complètement plusieurs secteurs couverts de hachures.

On doit remarquer tout d'abord que l'angle sous-tendu par σ est compris entre $\frac{3\pi}{\alpha_1}$ et $\frac{5\pi}{\alpha_1}$, si cet arc traverse complètement deux secteurs hachurés; que cet angle est compris entre $\frac{5\pi}{\alpha_1}$ et $\frac{7\pi}{\alpha_1}$, si l'arc σ traverse complètement trois secteurs hachurés, etc.

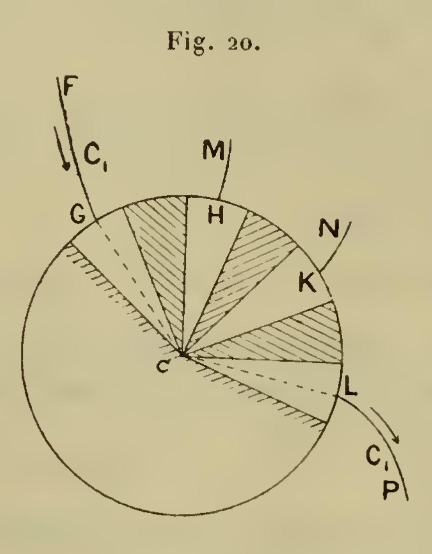
Lorsque l'arc σ traverse deux secteurs hachurés, il est facile de voir que l'intégrale proposée est égale à la somme de deux intégrales de la nature de celles que nous venons d'étudier à propos de la seconde hypothèse.

Si l'arc σ traverse trois secteurs hachurés, l'intégrale proposée est égale à la somme de trois intégrales de la nature de celles qui ont été étudiées à propos de la seconde hypothèse, et ainsi de suite.

Démontrons-le, par exemple, dans ce dernier cas :

Soit FGcLP le contour C_1 (*fig.* 20). Supposons que ce contour

Fig. 20.



devienne équivalent au contour C, pour l'intégrale proposée, quand on remplace la partie en pointillé GcL par l'arc de cercle infiniment petit GHKL.

Les courbes d'égal module de $\varphi(u)$ passant par le point $u = c$ étant tangentes aux rayons qui limitent les secteurs, ces courbes ne peuvent s'entrecouper une seconde fois qu'à distance finie du point c. Il en résulte qu'on peut tracer, dans les secteurs sans hachures, des chemins de longueurs finies MH et NK le long desquels $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$.

Dès lors, on peut remplacer l'intégrale (FGHKLP) par la somme des trois intégrales (FGHM) + (MHKN) + (NKLP) qui sont cha-

cune précisément de la nature de celles qui correspondent à la seconde hypothèse examinée ci-dessus.

Toutes ces intégrales peuvent, du reste, se déduire d'une seule d'entre elles, car ce qui change, quand on passe de l'une à la suivante, c'est uniquement l'argument de $(1 - z\varphi)^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1}$ dans le développement de $F(z)$ autour du point $z = \frac{1}{\varphi(c)}$, argument qui varie, en plus ou en moins, de $\left(\frac{\beta_1+1}{\alpha_1} - 1\right)2\pi$.

La règle à suivre pour obtenir ces intégrales est donc la suivante :

Quand on aura obtenu, au moyen de la formule (49), une intégrale correspondant à un secteur hachuré, on obtiendra l'intégrale correspondant au secteur hachuré voisin, rencontré en tournant autour du point $u - c$ dans le sens direct, on obtiendra, dis-je, cette intégrale en multipliant la précédente par le facteur $E^{2i\pi\left(\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1\right)}$. La seconde intégrale partielle, correspondant au second secteur hachuré rencontré en tournant autour du point $u - c$ dans le sens direct, s'obtiendra en multipliant le second membre de la formule (49) par $E^{4i\pi\left(\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1\right)}$, et ainsi de suite.

Si au lieu de tourner dans le sens direct, autour du point $z = \frac{1}{\varphi(c)}$, on tourne dans le sens rétrograde, l'intégrale correspondant au premier secteur rencontré s'obtiendra en multipliant le second membre de la formule (49) par $E^{-2i\pi\left(\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1\right)}$, l'intégrale correspondant au second secteur en multipliant la même expression par $E^{-4i\pi\left(\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1\right)}$, etc.

Si l'on voulait avoir une valeur plus approchée que celle que nous avons obtenue (49) pour l'intégrale I, il faudrait pousser plus loin le développement (39′) de $F(z)$, le sens des facteurs susceptibles de plusieurs déterminations s'obtenant toujours par la règle qui a été exposée après avoir obtenu la formule (49).

Cas particulier. — Un cas particulier intéressant se présente lorsque, $\varphi(u)$ étant holomorphe dans le voisinage du point $u = c$, sans que $\varphi'(c)$ soit nul, on a, dans le voisinage de c,

$$f(u) = (u - c)^{\beta}[B_1 + B_2(u - c) + B_3(u - c)^2 + \ldots].$$

De l'équation

$$z = \frac{1}{\varphi(u)}$$

on tire

$$u - c = \frac{\varphi}{\varphi'}(1 - z\varphi)\left[1 + \left(1 - \frac{\varphi\varphi''}{2\varphi'^2}\right)(1 - z\varphi) + \ldots\right].$$

On a d'ailleurs

$$-\frac{f(u)}{\varphi'(u)} = (u - c)^\beta\left[-\frac{B_1}{\varphi'} + \left(B_1\frac{\varphi''}{\varphi'^2} - \frac{B_2}{\varphi'}\right)(u - c) + \ldots\right],$$

et l'on en conclut

$$F(z) = \left(\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^\beta (1 - z\varphi)^\beta \frac{1}{\varphi'}\left\{-B_1 + \left[B_1\left(\frac{\beta+2}{2}\frac{\varphi\varphi''}{\varphi'^2} - \beta\right) - \frac{\varphi}{\varphi'}B_2\right](1 - z\varphi) + \ldots\right.$$

les termes négligés entre crochets contenant $(1 - z\varphi)^2$ en facteur.

On trouve maintenant, en appliquant la règle exposée au n° **8**,

$$\begin{aligned} I = & -2i\pi\left(\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^{\beta+1}\varphi^n\frac{1}{\Gamma(-\beta)} \\ & \times\left\{B_1\frac{\Gamma(n-\beta+1)}{\Gamma(n+2)} + (\beta+1)\left[B_1\left(\frac{\beta+2}{2}\frac{\varphi\varphi''}{\varphi'^2} - \beta\right) - \frac{\varphi}{\varphi'}B_2\right]\frac{\Gamma(n-\beta)}{\Gamma(n+2)} + \ldots\right\} \end{aligned}$$

ou, en développant les fonctions eulériennes,

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} I = & -\frac{2i\pi}{\Gamma(-\beta)}\left(\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^{\beta+1}\frac{\varphi^n}{n^{\beta+1}} \\ & \times\left\{B_1 + \frac{\beta+1}{n}\left[\frac{\beta+2}{2}\left(\frac{\varphi\varphi''}{\varphi'^2} - 1\right)B_1 - \frac{\varphi}{\varphi'}B_2\right] + \frac{1}{n^2}(\quad)\right\}. \end{aligned}\right.$$

Mais il faut voir dans quelles circonstances cette formule est applicable.

Figurons, à cet effet, dans le plan de la variable u (*fig.* 21), les axes de coordonnées, le point $u = c$ et la droite AcB séparant, dans le voi-

sinage du point c, les régions du plan où

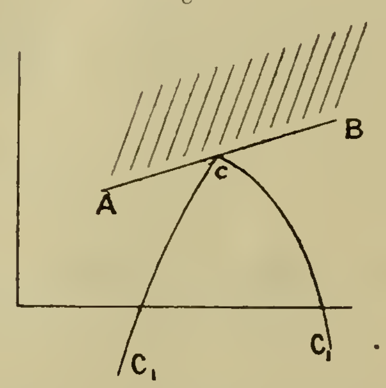
$$|\varphi(u)| > |\varphi(c)|$$

de celles où

$$|\varphi(u)| < |\varphi(c)|.$$

Couvrons de hachures les premières régions, comme nous l'avons fait jusqu'ici. Dans ces conditions, le contour C_1, dont nous avons

Fig. 21.



donné plus haut la définition, doit nécessairement être tracé dans la région non hachurée, dans le voisinage du point c. Il y a maintenant deux cas à considérer :

1° S'il est nécessaire de déformer C_1, infiniment peu, dans la région non hachurée, pour rendre ce contour équivalent au contour proposé, l'expression de I à laquelle nous venons de parvenir n'est pas applicable;

2° Si le contour C_1, pour devenir équivalent au contour proposé, doit être déformé vers la région hachurée, l'expression de I est applicable.

Au surplus, l'expression (50) suppose que la variable, en cheminant le long du contour C_1 déformé, tourne autour de c dans le sens rétrograde.

Dans le cas contraire, il faut changer le signe du second membre.

Enfin, pour fixer le sens du facteur $\left(\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^{\beta+1}$, on cherche celui de $\left(\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^{\beta}$. Supposons les coefficients B du développement de $f(u)$ choisis de façon que la détermination du facteur $(u-c)^{\beta}$ qui y figure corres-

ponde au plus petit argument positif de $u-c$. Dans ces conditions, si l'on appelle Θ_1 le plus petit argument positif de $u-c$, pour un point quelconque pris dans la région hachurée, la détermination de $\left(\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^\beta$ correspond à l'argument qui diffère de $\beta\Theta_1$ d'une quantité moindre que $\beta\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue.

§ V.

Généralisation des théorèmes II et III.

14. Nous avons trouvé (p. 214) que l'intégrale suivante, dans laquelle $h > -1$,

$$I = \int\left(\frac{z}{a}-1\right)^h \frac{dz}{z^{n+1}},$$

prise le long d'un contour de troisième espèce par rapport au point a, s'étendant à l'infini, a pour valeur

$$I = \frac{1}{a^n}\frac{\Gamma(h+1)\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)}.$$

Donnons au symbole $\left(\frac{z}{a}-1\right)^h$ le sens $E^{h\operatorname{Log}\left(\frac{z}{a}-1\right)}$ et, pour achever de le définir, choisissons comme argument de $\frac{z}{a}-1$ celui qui est nul le long du prolongement du segment joignant l'origine au point a. On peut alors différentier q fois les deux membres par rapport à h et écrire

$$(51)\quad J = \int\left(\frac{z}{a}-1\right)^h \operatorname{Log}^q\left(\frac{z}{a}-1\right)dz = \frac{1}{a^n}\frac{d^q}{dh^q}\frac{\Gamma(h+1)\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)}.$$

Or on a, pour n très grand et positif

$$\frac{\Gamma(h+1)\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\Gamma(h+1)}{n^{1+h}}\left[1+\frac{h(h+1)}{2n}(1+\varepsilon)\right],$$

ε tendant vers zéro lorsque n croît indéfiniment.

Cette formule pouvant être différentiée terme à terme par rapport à h, comme nous l'avons fait remarquer à propos de la formule (44), on en conclut que, pour n très grand, l'intégrale J est de l'ordre de $\frac{\text{Log}^q n}{n^{1+h}}$, le produit

$$J \frac{n^{1+h}}{\text{Log}^q n}$$

tendant vers une limite lorsque n croît indéfiniment.

En s'appuyant sur ce résultat et suivant une marche analogue à celle qui a conduit au théorème II, on est amené à généraliser ce théorème.

On remarque d'abord (notations de la remarque du lemme II) que le produit

$$R^n \frac{n^{1+h}}{\text{Log}^q n} \int_0^l \frac{\left(\frac{x}{R}\right)^h}{(R+x)^{n+1}} \text{Log}^q \frac{x}{R} dx,$$

tend vers une limite lorsque n croît indéfiniment.

On en déduit que le produit suivant, dans lequel h est supérieur à -1, q un entier positif et $\psi(z)$ une fonction analytique finie dans le voisinage de a,

$$a^n \frac{n^{1+h}}{\text{Log}^q n} \int \left(\frac{z}{a} - 1\right)^h \text{Log}^q \left(\frac{z}{a} - 1\right) \psi(z)\, dz,$$

ne dépasse pas une quantité fixe lorsque n croît indéfiniment (démonstration analogue à celle du lemme VI). De là résulte immédiatement le théorème suivant qui généralise le théorème II :

THÉORÈME IV. — *Soient n un nombre positif très grand, entier, fractionnaire ou incommensurable, et $F(z)$ une fonction indépendante de n.*

Considérons l'intégrale

$$M = \int F(z) \frac{dz}{z^{n+1}},$$

prise le long d'un contour C de troisième espèce par rapport à un

point d'affixe $z = a$. Cette intégrale étant supposée finie, pour n fini, admettons que le point a soit séparé des singularités de $F(z)$ *et de l'origine par des espaces finis. Admettons, en outre, qu'on puisse écrire, dans le domaine de a,*

$$F(z) = F_1(z) + \left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha} \psi(z) \operatorname{Log}^q\left(\frac{z}{a} - 1\right),$$

$$\begin{aligned} F_1(z) = \quad & A_1\left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha_1} \operatorname{Log}^{q_1}\left(\frac{z}{a} - 1\right) \\ & + A_2\left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha_2} \operatorname{Log}^{q_2}\left(\frac{z}{a} - 1\right) + \ldots \\ & + A_p\left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha_p} \operatorname{Log}^{q_p}\left(\frac{z}{a} - 1\right), \end{aligned}$$

la fonction $\psi(z)$ étant finie dans le domaine de a; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha$ désignant des nombres entiers ou fractionnaires vérifiant les inégalités

$$-1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p < \alpha;$$

$q_1, q_2, \ldots, q_p, q$ des entiers positifs et $A_1, A_2, \ldots, A_p$ *des constantes.*

Dans ces conditions, si l'on pose

$$N = \int F_1(z) \frac{dz}{z^{n+1}},$$

l'intégrale étant prise le long du contour C, *le produit*

$$a^n \frac{n^{1+\alpha}}{\operatorname{Log}^q n} (M - N)$$

n'augmente pas indéfiniment avec n.

Évaluation approchée de M. — On admet essentiellement, pour appliquer ce théorème, que les constantes A sont choisies de façon que les déterminations des binomes et des logarithmes népériens figurant dans le développement de $F(z)$ correspondent à celui des arguments de $\frac{z}{a} - 1$ qui est nul pour les points du plan situés sur le prolongement,

au delà de a, du segment de droite allant de l'origine à ce point a. On admet de plus que le sens de l'intégration est tel que la variable parte du point a.

Posons

$$U_p = \frac{1}{a^n} \frac{d^{q_p}}{d\alpha_p^{q_p}} \frac{\Gamma(\alpha_p + 1)\Gamma(n - \alpha_p)}{\Gamma(n + 1)}.$$

En raisonnant exactement comme nous l'avons fait au n° 5, il résulte du théorème IV qu'on peut écrire

$$M = A_1 U_1 + A_2 U_2 + \ldots + A_p U_p + N_1, \tag{52}$$

le produit $a_n \frac{n^{1+\alpha}}{\text{Log}^q n} N_1$ n'augmentant pas indéfiniment avec n. Par conséquent, si l'on prend $A_1 U_1$ comme valeur approchée de M on commet une erreur de l'ordre de $\frac{1}{a^n} \frac{\text{Log}^{q_2} n}{n^{1+\alpha_2}}$, c'est-à-dire que le produit

$$(M - A_1 V_1) a^n \frac{n^{1+\alpha_2}}{\text{Log}^{q_2} n}$$

n'augmente pas indéfiniment avec n. En prenant

$$M = A_1 V_1 + A_2 V_2$$

on commet une erreur de l'ordre de $\frac{1}{a^n} \frac{\text{Log}^{q_3} n}{n^{1+\alpha_3}}$, etc.

L'erreur relative commise en prenant pour M sa valeur approchée est d'autant plus petite, pour n très grand, qu'on prend plus de termes dans le second membre de la formule (52).

15. Le théorème III relatif à l'évaluation approchée des intégrales de la forme

$$2i\pi I = \int F(z) \frac{dz}{z^{n+1}},$$

prises le long d'un contour de première espèce par rapport à un point singulier $z = a$ de $F(z)$, peut être généralisé de la même manière que le théorème II.

Nous avons trouvé qu'on a (lemme VII)

$$2i\pi\int\left(1-\frac{z}{a}\right)^h\frac{dz}{z^{n+1}}=\frac{1}{a^n}\frac{\Gamma(n-h)}{\Gamma(-h)\Gamma(n+1)},$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour de première espèce par rapport au point a. On tire de là, en différentiant q fois par rapport à h,

$$(53)\quad 2i\pi\int\frac{\left(1-\frac{z}{a}\right)^h\operatorname{Log}^q\left(1-\frac{z}{a}\right)}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{a^n}\frac{d^q}{dh^q}\frac{\Gamma(n-h)}{\Gamma(-h)\Gamma(n+1)},$$

et il en résulte, comme dans le cas de la formule (51), que l'intégrale écrite dans le premier membre est, pour n très grand, de l'ordre de $\frac{1}{a^n}\frac{\operatorname{Log}^q n}{n^{1+h}}$ si h n'est pas un entier positif. Lorsque h est entier et positif, $\frac{1}{\Gamma(-h)}$ étant nul, l'intégrale est, pour n très grand, de l'ordre de $\frac{1}{a^n}\frac{\operatorname{Log}^{q-1} n}{n^{1+h}}$.

La formule (53) suppose d'ailleurs essentiellement que les déterminations du binome et du logarithme népérien qui figurent sous le signe $\int$ correspondent à l'argument $1-\frac{z}{a}$ qui se réduit à zéro pour les points du plan situés sur le segment de droite joignant l'origine au point a. D'autre part, la variable en cheminant sur le contour d'intégration doit tourner autour du point a dans le sens rétrograde.

En s'appuyant sur le lemme VIII, sur l'extension du lemme VI (p. 268) et sur le résultat que nous venons d'obtenir, suivant d'ailleurs un raisonnement calqué sur celui que nous avons employé pour arriver à la démonstration du théorème III, on arrive à étendre ce théorème comme nous allons l'indiquer. Il y a cependant une légère différence dans l'application du lemme VIII, parce que le long du chemin de troisième espèce aB_1 (*fig.* 9) on doit poser

$$\left(1-\frac{z}{a}\right)^\alpha\operatorname{Log}^q\left(1-\frac{z}{a}\right)=E^{i\pi\alpha}\left(\frac{z}{a}-1\right)^\alpha\left[i\pi+\operatorname{Log}\left(\frac{z}{a}-1\right)\right]^q,$$

les déterminations du binome et du logarithme népérien écrits dans le second membre correspondant à l'argument de $\frac{z}{a}-1$ qui est nul pour

les points du plan situés au delà du point a, sur le prolongement du segment de droite joignant l'origine à ce point a.

De même on doit poser, pour les points situés le long du contour de troisième espèce $a\mathrm{D}_1$ (*fig.* 9),

$$\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha}\mathrm{Log}^q\left(1-\frac{z}{a}\right) \equiv \mathrm{E}^{-i\pi\alpha}\left(\frac{z}{a}-1\right)^{\alpha}\left[-i\pi+\mathrm{Log}\left(\frac{z}{a}-1\right)\right]^q.$$

Il en résulte qu'au lieu d'avoir à considérer deux intégrales dont la somme multipliée par $a^n\dfrac{n^{1+\alpha}}{\mathrm{Log}^q n}$ n'augmente pas indéfiniment avec n, on se trouve en présence d'une somme de $2q+2$ intégrales dont le produit par le même facteur n'augmente pas indéfiniment avec n.

Ce point de détail réglé, voici comment peut s'énoncer l'extension du théorème III :

Théorème V. — *Soient n un nombre positif très grand, entier, fractionnaire ou incommensurable, et* $\mathrm{F}(z)$ *une fonction indépendante de n.*

Considérons l'intégrale

$$2i\pi\mathrm{M}=\int_{\mathrm{C}}\mathrm{F}(z)\frac{dz}{z^{n+1}},$$

prise le long d'un contour de première espèce par rapport à un point singulier isolé a de $\mathrm{F}(z)$. *Admettons qu'on puisse écrire, dans le domaine de a,*

$$\mathrm{F}(z)=\varphi(z)+\mathrm{F}_1(z)+\left[\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha}\mathrm{Log}^q\left(1-\frac{z}{a}\right)\right]\psi(z),$$

$\psi(z)$ *désignant une fonction analytique finie dans le domaine de a,* $\varphi(z)$ *étant holomorphe dans le domaine de a et* $\mathrm{F}_1(z)$ *représentant l'expression*

$$\begin{aligned}\mathrm{F}_1(z)= \quad & \mathrm{A}_1\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_1}\mathrm{Log}^{q_1}\left(1-\frac{z}{a}\right)\\ &+\mathrm{A}_2\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_2}\mathrm{Log}^{q_2}\left(1-\frac{z}{a}\right)+\ldots\\ &+\mathrm{A}_p\left(1-\frac{z}{a}\right)^{p}\mathrm{Log}^{q_p}\left(1-\frac{z}{a}\right),\end{aligned}$$

dans laquelle $A_1, A_2, \ldots, A_p$ *désignent des constantes, les* q *des entiers positifs, les* α *vérifiant les inégalités*

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p < \alpha,$$

α *étant en outre supérieur à* -1.

Dans ces conditions, si l'on pose

$$2i\pi N = \int_C F_1(z)\frac{dz}{z^{n+1}},$$

l'intégrale étant prise le long du contour C, *le produit*

$$a^n \frac{n^{1+\alpha}}{\operatorname{Log}^q n}(M - N), \qquad \textit{si } \alpha \textit{ n'est pas un entier positif,}$$

ou

$$a^n \frac{n^{1+\alpha}}{\operatorname{Log}^{q-1} n}(M - N), \qquad \textit{si } \alpha \textit{ est un entier positif,}$$

n'augmente pas indéfiniment avec n.

Évaluation approchée de M. — On admet essentiellement, pour appliquer ce théorème, que les constantes A qui rentrent dans le développement de $F_1(z)$ sont choisies de façon que les déterminations des binomes et des logarithmes népériens, figurant dans le même développement, correspondent à l'argument de $1 - \frac{z}{a}$ qui est nul pour les points du plan situés le long du segment de droite joignant l'origine au point a. De plus, on suppose que la variable d'intégration chemine sur le contour, de manière à tourner, dans le sens rétrograde, autour du point a, dans le voisinage de ce point.

Si l'on pose

$$U_p = \frac{1}{a^n}\frac{d^{q_p}}{d\alpha_p^{q_p}}\frac{\Gamma(n-\alpha_p)}{\Gamma(-\alpha_p)\Gamma(n+1)},$$

il résulte de ce théorème qu'on a

$$(54) \qquad M = A_1U_1 + A_2U_2 + \ldots + A_pU_p + N'_1,$$

le produit $a^n \frac{n^{1+\alpha}}{\text{Log}^q n} N'_1$, si α est quelconque, ou $a^n \frac{n^{1+\alpha}}{\text{Log}^{q-1} n} N'_1$, si α est entier et positif, n'augmentant pas indéfiniment avec n.

Les termes de cette somme étant tels que le rapport d'un terme au précédent tend vers zéro, lorsque n croît indéfiniment, si l'on prend un certain nombre de termes comme valeur approchée de M, on commet une erreur de l'ordre du premier terme négligé.

Ainsi, en prenant $A_1 U_1$ comme valeur approchée, on commet une erreur de l'ordre de $\frac{1}{a^n} \frac{\text{Log}^{q_1}}{n^{1+\alpha_1}}$ ou $\frac{1}{a^n} \frac{\text{Log}^{q_1-1}}{n^{1+\alpha_1}}$ si α_1 est entier positif. On peut écrire

$$M = A_1 U_1 (1 + \varepsilon_1),$$

le produit

$$\frac{n^{\alpha_2 - \alpha_1}}{\text{Log}^{q_2 - q_1} n} \varepsilon_1$$

n'augmentant pas indéfiniment avec n.

En prenant $A_1 U_1 + A_2 U_2$ comme valeur approchée, on peut écrire

$$M = (A_1 U_1 + A_2 U_2)(1 + \varepsilon_2),$$

le produit

$$\frac{n^{\alpha_3 - \alpha_1}}{\text{Log}^{q_3 - q_1} n} \varepsilon_2$$

n'augmentant pas indéfiniment avec n, etc.

L'erreur relative commise sur M est d'autant plus faible qu'on prend plus de termes dans la formule (54) [1].

---

[1] Le théorème peut être étendu à des points singuliers auxquels correspondent, dans $F_1(z)$, des termes de la forme $\left(1 - \frac{z}{a}\right)^\alpha \text{Log}^{-q}\left(1 - \frac{z}{a}\right)$, où q est un entier positif. Il faut partir à cet effet de l'identité

$$\int \frac{\left(1 - \frac{z}{a}\right)^\alpha}{\text{Log}^q\left(1 - \frac{z}{a}\right)} \frac{dz}{z^{n+1}}$$

$$= -(1)^q \frac{2i\pi}{a^n} \int_0^1 dh_1 \int_0^1 dh_2 \ldots \int_0^1 dh_q \frac{\Gamma(n + q - \alpha - h_1 - \ldots - h_q)}{\Gamma(-\alpha - h_1 - \ldots - h_q)\Gamma(n + q + 1)}.$$

Mais on est ainsi conduit à des transcendantes qui ne se prêtent pas au calcul numérique.

Remarque. — Si le contour d'intégration était également de première espèce, par rapport à d'autres points singuliers de $F(z)$, situés à la même distance de l'origine que le point a, il faudrait, comme on l'a expliqué à propos de l'application du théorème III, considérer séparément chacun de ces points singuliers particuliers et faire la somme des résultats obtenus.

Enfin, pour exprimer M suivant les puissances descendantes de n, il faudra développer la formule (54) au moyen de l'expression (43) de la fonction eulérienne qu'on peut différentier par rapport à p, comme nous l'avons déjà fait observer.

Le théorème qui vient d'être énoncé joue un rôle capital dans mes recherches sur le développement approché de la fonction perturbatrice.

VI.

Les résultats obtenus aux nos **14** et **15** conduisent à la valeur approchée des intégrales de la forme

$$I = \int f(u)\,\varphi^n(u)\,du,$$

dans des conditions encore plus générales que celles dans lesquelles nous nous sommes déjà placés.

16. Supposons d'abord que le contour d'intégration parte d'un point $u = c$ et, de plus, que $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$, le long de ce contour.

Admettons, en outre, qu'on puisse écrire, dans le voisinage du point c,

$$(55)\qquad \begin{cases} f(u) = B_1(u-c)^{\beta_1}\operatorname{Log}^{q_1}(u-c) \\ \qquad\qquad + B_2(u-c)^{\beta_2}\operatorname{Log}^{q_2}(u-c) + \ldots, \\ \varphi(u) = \varphi(c) + A_1(u-c)^{\alpha_1} + A_2(u-c)^{\alpha_2} + \ldots, \end{cases}$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots$ étant supérieurs à -1 et rangés par ordre de grandeurs croissantes, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ désignant des exposants positifs, rangés également par ordre de grandeurs croissantes, les q représentant d'ailleurs des entiers positifs, les B et les A des constantes.

Dans ces conditions, l'évaluation approchée de I pour n très grand, peut être ramenée à celle des intégrales étudiées au n° **14.**

En posant

$$z = \frac{1}{\varphi(u)},$$

on ramène l'intégrale à la forme

$$I = \int F(z) \frac{dz}{z^{n+2}},$$

le contour d'intégration, dans le plan de la variable z, étant de troisième espèce par rapport au point $z = \frac{1}{\varphi(c)}$, comme on l'a expliqué au n° **12**.

Or, des équations (55) on tire, comme au n° **12**, en écrivant φ à la place de $\varphi(c)$,

$$(56) \qquad u - c = \left(\frac{-\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}} (z\varphi - 1)^{\frac{1}{\alpha_1}} + \ldots,$$

et l'on en déduit

$$F(z) = -\frac{B_1}{\alpha_1 A_1} \left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1 + 1 - \alpha_1}{\alpha_1}} (z\varphi - 1)^{\frac{\beta_1 + 1 - \alpha_1}{\alpha_1}}$$
$$\times \left[\operatorname{Log}\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}} (z\varphi - 1)^{\frac{1}{\alpha_1}}\right]^{q_1} + \ldots,$$

les termes non écrits contenant en facteur une puissance de $(z\varphi - 1)$ supérieure à $\frac{\beta_1 + 1 - \alpha_1}{\alpha_1}$ égale au plus petit des nombres

$$\frac{\beta_2 + 1 - \alpha_1}{\alpha_1}, \quad \frac{\beta_1 + 1 + \alpha_2 - 2\alpha_1}{\alpha_1}, \quad \frac{\beta_1 + 1}{\alpha_1}.$$

On peut encore écrire

$$F(z) = -\frac{B_1}{\alpha_1 A_1} \left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1 + 1 - \alpha_1}{\alpha_1}} (z\varphi - 1)^{\frac{\beta_1 + 1 - \alpha_1}{\alpha_1}}$$
$$\times \left[\operatorname{Log}\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}} + \frac{1}{\alpha_1} \operatorname{Log}(z\varphi - 1)\right]^{q_1} + \ldots,$$

ou

$$F(z) = -\frac{B_1}{\alpha_1 A_1}\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}} \sum_{r=0}^{r=q_1} \frac{q_1!}{r!(q_1-r)!}$$

$$\times \left[\operatorname{Log}\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}\right]^{q_1-r} \frac{1}{\alpha_1^r}(z\varphi-1)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}} [\operatorname{Log}(z\varphi-1)]^r + \ldots$$

Ce développement de $F(z)$, dans le voisinage du point $z = \frac{1}{\varphi}$, donne, en appliquant la règle établie au n° **14**,

$$I = -\frac{B_1}{\alpha_1 A_1}\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}} \sum_{r=0}^{r=q_1} \frac{q_1!}{r!(q_1-r)!}$$

$$\times \left[\operatorname{Log}\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}\right]^{q_1-r} \frac{1}{\alpha_1^r}\varphi^{n+1} \frac{d^r}{dt^r} \frac{\Gamma(t+1)\Gamma(n+1-t)}{\Gamma(n+2)} + \ldots,$$

t étant mis à la place de $\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}$.

Les termes négligés contiennent en dénominateur une puissance de n égale au plus petit des nombres

$$\frac{\beta_2+1}{\alpha_1}, \quad \frac{\beta_1+1+\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_1}, \quad \frac{\beta_1+1}{\alpha_1}+1$$

et en facteur une puissance positive de $\operatorname{Log} n$.

Il reste pour clore la question à fixer la détermination de

$$\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}} \quad \text{et de} \quad \operatorname{Log}\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}.$$

On part à cet effet de la formule (56).

Appelons, comme au n° **12**, Θ l'angle que fait, avec l'axe des abscisses, la tangente menée au point $u = c$, au contour donné, dans le sens de l'intégration que l'on suppose partir du point c.

Admettons que les constantes des développements (55) aient été choisies de telle sorte que les déterminations des binomes et des logarithmes qui y figurent correspondent à l'argument de $u - c$ égal à Θ pour les points du contour infiniment voisins de $u = c$. Dans ces con-

ditions on verra, par des considérations analogues à celles qui ont été développées au n° **12**, que l'argument de $\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}$ qu'on doit prendre est celui qui diffère de Θ d'une quantité inférieure à $\frac{\pi}{2\alpha_1}$ en valeur absolue. L'argument de $\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}$ s'obtient en multipliant celui de $\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}$ par $\beta_1+1-\alpha_1$.

17. Supposons maintenant que le point c, dans le voisinage duquel $f(u)$ et $\varphi(u)$ sont exprimées par les formules (55) [1], ne soit pas une extrémité du contour d'intégration C de l'intégrale

$$I=\int f(u)\,\varphi^n(u)\,du,$$

mais qu'on puisse déformer ce contour de manière à le faire passer par le point $u=c$ et qu'il jouisse alors des propriétés suivantes : 1° ce nouveau contour C_1 serait équivalent au contour donné si le point $u=c$ n'était pas un point singulier de $f(u)$ et de $\varphi(u)$; 2° la plus grande valeur de $|\varphi(u)|$ le long de C_1 est $|\varphi(c)|$.

Il y a alors, comme pour le problème étudié au n° **15**, à examiner trois hypothèses qui peuvent se présenter quand on déforme le contour C_1 pour le rendre équivalent au contour C (se reporter au n° **15**, 2e cas) :

1° Lorsque l'angle sous-tendu par l'arc σ, qui a été considéré page 259, est inférieur à $\frac{\pi}{\alpha_1}$, on voit, comme au n° **15**, que le point c ne peut servir à évaluer l'intégrale I;

2° L'angle sous-tendu par l'arc σ est compris entre $\frac{\pi}{\alpha_1}$ et $\frac{3\pi}{\alpha_1}$.

Dans cette hypothèse, le contour C_2, que nous avons considéré au n° **15** et qui est équivalent au contour C pour l'intégrale proposée,

---

(1) Les exposants β figurant dans ces développements ne sont plus astreints, dans ce qui suit, à être supérieurs à -1.

ce contour, dis-je, passe par des points pour lesquels $|\varphi(u)| > |\varphi(c)|$. Appelons Θ_1 le plus petit argument positif du binome $u - c$ relatif à l'un d'eux. Supposons que les déterminations des binomes et des logarithmes figurant dans les formules (55) correspondent au plus petit argument positif de $u - c$.

Dans ces conditions, en raisonnant comme nous l'avons fait pour établir la formule (49) et développant $F(z) = -\frac{f(u)}{\varphi(u)}$, comme à la page 276, mais en partant de l'expression

$$u - c = \left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}} (1 - z\varphi)^{\frac{1}{\alpha_1}} + \ldots,$$

on a

$$(57) \quad F(z) = -\frac{B_1}{\alpha_1 A_1}\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}} (1 - z\varphi)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}} \left[\operatorname{Log}\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}} + \frac{1}{\alpha_1}\operatorname{Log}(1 - z\varphi)\right]^{q_1} + \ldots,$$

ou

$$F(z) = -\frac{B_1}{\alpha_1 A_1}\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}} \sum_{r=0}^{r=q_1} \frac{q_1!}{r!(q_1-r)!}\left[\operatorname{Log}\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}\right]^{q_1-r} \frac{1}{\alpha_1^r}(1 - z\varphi)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}} [\operatorname{Log}(1 - z\varphi)]^r + \ldots,$$

et il en résulte, en appliquant la règle établie au n° **15**,

$$(58) \quad \frac{1}{2i\pi} I = -\frac{B_1}{\alpha_1}\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}} \varphi^n \sum_{r=0}^{r=q_1} \frac{q_1!}{r!(q_1-r)!}\left[\operatorname{Log}\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}\right]^{q_1-r} \frac{1}{\alpha_1^r}\frac{d^r}{dt^r}\frac{\Gamma(n+1-t)}{\Gamma(-t)\Gamma(n+2)} + \ldots,$$

t étant mis à la place de $\frac{\beta_1 + 1 - \alpha_1}{\alpha_1}$. Cette formule suppose, du reste, le sens de l'intégration tel que la variable u tourne autour du point c dans le sens rétrograde en décrivant la partie du contour C_2 voisine de c. Les termes négligés contiennent en dénominateur une puissance de u égale au plus petit des nombres

$$\frac{\beta_2+1}{\alpha_1}, \quad \frac{\beta_1+1+\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_1}, \quad \frac{\beta_1+1}{\alpha_1}+1$$

et en facteur une puissance de $\operatorname{Log} n$.

On verrait, par des considérations analogues à celles qui ont été développées à propos de la formule (49), que l'argument de $\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}$ qu'il convient de choisir est celui qui diffère de Θ_1 d'une quantité moindre que $\frac{\pi}{2\alpha_1}$ en valeur absolue. De même l'argument de la détermination de $\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}$ qu'il convient de choisir est celui qui diffère de $(\beta_1+1-\alpha_1)\Theta_1$ d'une quantité moindre que $\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue.

3° L'angle sous-tendu par l'arc σ est supérieur à $\frac{3\pi}{\alpha_1}$.

Si cet angle est compris entre $(2k-1)\frac{\pi}{\alpha_1}$ et $(2k+1)\frac{\pi}{\alpha_1}$, k étant un entier, on voit, par des considérations identiques à celles qui ont été développées à la fin du n° **15** (p. 263), que l'intégrale proposée est la somme de k intégrales de la nature de celle dont nous venons de trouver la valeur, en étudiant la seconde hypothèse.

Toutes ces intégrales peuvent, du reste, se déduire de l'une d'entre elles, car ce qui change dans le développement (57) de $F(z)$, quand on passe de l'une à la suivante, c'est uniquement l'argument de $1-z\varphi$ qui varie, en plus ou en moins, de 2π suivant le sens de l'intégration.

La règle à suivre pour obtenir ces intégrales est donc la suivante :

Quand on aura obtenu, au moyen de la formule (58), une des intégrales correspondant à un secteur hachuré (*voir* la fin du n° **15**), on obtiendra l'intégrale partielle correspondant au secteur hachuré voisin rencontré en tournant, autour du point $u=c$, dans le sens direct, on obtiendra, dis-je, cette intégrale en remplaçant le rapport $\frac{\varphi}{A_1}$, dans la formule (58), par $\frac{\varphi}{A_1}E^{2i\pi}$, E désignant comme toujours la base des logarithmes népériens.

L'intégrale partielle correspondant au secteur hachuré, rencontré ensuite en tournant toujours autour du point $u=c$, dans le sens direct, s'obtiendra de même en remplaçant, dans la formule (58), $\frac{\varphi}{A_1}$ par $\frac{\varphi}{A_1}E^{4i\pi}$, et ainsi de suite.

Si au lieu de tourner dans le sens direct, autour du point c, on tournait dans le sens rétrograde, on devrait remplacer, dans la formule (58), $\frac{\varphi}{A_1}$ par $\frac{\varphi}{A_1}E^{-2i\pi}$ pour l'intégrale partielle correspondant au secteur hachuré immédiatement voisin de celui dont on est parti, puis par $\frac{\varphi}{A_1}E^{-4i\pi}$ pour l'intégrale partielle suivante, etc.

Sur l'équation fonctionnelle de Fredholm;

PAR M. BRYON HEYWOOD.

CHAPITRE I.

THÉORIE DES FONCTIONS FONDAMENTALES RELATIVES A UNE ÉQUATION DE FREDHOLM.

§ 1. — Théorie de M. Fredholm [1].

1. On appelle les deux équations suivantes :

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\varphi(t)\,dt = f(s), \\ \psi(t) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\psi(s)\,ds = f(t), \end{cases}$$

les *équations fonctionnelles associées de Fredholm relatives au noyau* $\mathrm{K}(s, t)$.

Dans ces équations les fonctions $\mathrm{K}(s, t), f(s)$ sont connues, et l'on cherche à déterminer $\varphi(s)$, $\psi(t)$.

Les limites d'intégration sont fixes : elles ne seront plus désignées explicitement. Il est supposé d'abord que les fonctions $\mathrm{K}(s, t)$, $f(s)$ sont finies et intégrables.

M. Fredholm démontre que les solutions des équations (1) dépendent d'une certaine *fonction résolvante,* $\mathrm{K}(s, t, \lambda)$, qui satisfait aux équa-

(1) IVAR FREDHOLM, *Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar,* Stockholm, 1900. — *Acta mathematica,* t. XXVII, 1903.

tions

$$(2)\quad \begin{cases} -K(s,t)+K(s,t,\lambda)=\lambda\int K(s,\tau)K(\tau,t,\lambda)\,d\tau, \\ \qquad\qquad\qquad\quad =\lambda\int K(s,\tau,\lambda)K(\tau,t)\,d\tau. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier, par substitution directe et tout en supposant l'existence pour une valeur donnée de λ d'une fonction $K(s,t,\lambda)$, finie et intégrable, que les deux expressions

$$(3)\quad \begin{cases} \varphi(s)=f(s)+\lambda\int K(s,t,\lambda)f(t)\,dt, \\ \psi(t)=f(t)+\lambda\int K(s,t,\lambda)f(s)\,ds \end{cases}$$

sont des solutions des équations (1). On vérifie de même qu'elles sont les seules solutions, en substituant dans (3) les valeurs de $f(s)$ tirées de (1).

2. M. Fredholm trouve pour la résolvante une fonction unique, méromorphe en λ,

$$K(s,t,\lambda)=\frac{D\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\lambda}{D(\lambda)},$$

où $D\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\lambda$, $D(\lambda)$ désignent respectivement les fonctions entières

$$D\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\lambda = \sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^n}{n!}\int\int\cdots\int K\begin{pmatrix} s, & s_1, & s_2, & \dots, & s_n \\ t, & s_1, & s_2, & \dots, & s_n \end{pmatrix} ds_1\,ds_2\dots ds_n,$$

$$D(\lambda) = \sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^n}{n!}\int\int\cdots\int K\begin{pmatrix} s_1, & s_2, & \dots, & s_n \\ s_1, & s_2, & \dots, & s_n \end{pmatrix} ds_1\,ds_2\dots ds_n,$$

$K\begin{pmatrix} s_1, & s_2, & \dots, & s_n \\ t_1, & t_2, & \dots, & t_n \end{pmatrix}$ étant le déterminant

$$\begin{vmatrix} K(s_1,t_1) & K(s_1,t_2) & \dots & K(s_1,t_n) \\ K(s_2,t_1) & K(s_2,t_2) & \dots & K(s_2,t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(s_n,t_1) & K(s_n,t_2) & \dots & K(s_n,t_n) \end{vmatrix}.$$

On appelle $D(\lambda)$ *le déterminant relatif au noyau* $K(s, t)$. Tous les pôles de $K(s, t, \lambda)$, considérée comme fonction de λ, sont des zéros de $D(\lambda)$; ils sont par conséquent indépendants de s, t. On démontre facilement que tous les zéros de $D(\lambda)$ sont des pôles de $K(s, t, \lambda)$. On a

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \int D\begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix}\lambda\Big)\,ds &= \int K(s, s)\,ds - \lambda \int\int K\begin{pmatrix} s_1, s_2 \\ s_1, s_2 \end{pmatrix} ds_1\,ds_2 + \ldots \\ &= -\frac{d}{d\lambda} D(\lambda). \end{aligned}\right.$$

Donc λ_1 étant un zéro d'ordre p de $D(\lambda)$, et un zéro d'ordre p_1 de $D\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\lambda\Big)$, il faut qu'on ait

$$p \geqq p_1 + 1.$$

D'où il résulte que λ_1 est un pôle de $K(s, t, \lambda)$.

Les zéros de $D(\lambda)$ ont la plus grande importance : on les appelle *constantes caractéristiques du noyau* $K(s, t)$. Nous les désignons par les symboles

$$(5)\qquad \lambda_1,\quad \lambda_2\quad \lambda_3,\quad \ldots,\quad \lambda_n,\quad \ldots.$$

Lorsque λ est inférieur en module à la première constante caractéristique λ_1, $K(s, t, \lambda)$ s'exprime par la série

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} K(s, t, \lambda) &= K_1(s, t) + \lambda K_2(s, t) \\ &\quad + \lambda^2 K_3(s, t) + \ldots + \lambda^n K_n(s, t) + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Les coefficients sont les *noyaux réitérés*. Ils sont déterminés par les formules

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} K_1(s, t) &= K(s, t), \\ K_2(s, t) &= \int K(s, \tau)\,K(\tau, t)\,d\tau, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ K_n(s, t) &= \int K(s, \tau)\,K_{n-1}(\tau, t)\,d\tau \\ &= \int\ldots\int K(s, \tau_1)\,K(\tau_1, \tau_2)\ldots K(\tau_{n-1}, t)\,d\tau_1\,d\tau_2\ldots d\tau_{n-1}. \end{aligned}\right.$$

Si la longueur du chemin d'intégration est l'unité, et que M désigne la limite supérieure de $|K(s,t)|$, on aura

$$|K_n(s,t)| \leqq M^n.$$

Le rayon de convergence de la série (6) est $|\lambda_1|$. On a, par conséquent,

$$|\lambda_1| \geqq \frac{1}{M}.$$

5. De ce qui précède il résulte que, dans le cas où λ n'est pas égal à une constante caractéristique, chacune des deux équations (1) a une solution finie, unique, et bien déterminée. Cette solution s'évanouit lorsque $f(s) = 0$ identiquement.

Lorsque λ est égal à une constante caractéristique λ_1, il n'y a pas en général de solutions finies des équations avec second membre. Pour qu'il y ait des solutions, il faut que la fonction $f(s)$ satisfasse à certaines conditions, comme nous le verrons plus tard. Mais, pour $\lambda = \lambda_1$, il y aura toujours des solutions des équations sans second membre

$$(8) \quad \begin{cases} \varphi(s) - \lambda_1 \int K(s,t)\varphi(t)\,dt = 0, \\ \psi(t) - \lambda_1 \int K(s,t)\psi(s)\,ds = 0. \end{cases}$$

M. Fredholm écrit

$$(9) \quad \begin{cases} D_k\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_k \\ t_1, t_2, \ldots, t_k \end{pmatrix} \lambda \\ = \sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int \cdots \int K\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_k, s_{k+1}, \ldots, s_{k+n} \\ t_1, t_2, \ldots, t_k, s_{k+1}, \ldots, s_{k+n} \end{pmatrix} ds_{k+1} \ldots ds_{k+n}. \end{cases}$$

La fonction D_k est entière en λ, les variables $s_1, s_2, \ldots, s_k$; $t_1, t_2, \ldots, t_k$ étant arbitraires.

Il démontre alors que si l'on a identiquement

$$D(\lambda_1) = 0, \quad D\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \lambda_1 = 0, \quad \ldots, \quad D_{q-1}\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_{q-1} \\ t_1, t_2, \ldots, t_{q-1} \end{pmatrix} \lambda_1 = 0,$$

mais que

$$D_q\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_q \\ t_1, t_2, \ldots, t_q \end{pmatrix} \lambda_1 \neq 0,$$

il y a q solutions *indépendantes* de chacune des équations (8). Pour la première équation on a les q solutions

$$\Phi_k(s) = (-1)^{k-1} \frac{D_q\begin{pmatrix} s_1, & s_2, & \ldots, & s_{k-1}, & s, & s_{k+1}, & \ldots, & s_q \\ t_1, & t_2, & \ldots, & t_{k-1}, & t_k, & s_{k+1}, & \ldots, & t_q \end{pmatrix}}{D_q\begin{pmatrix} s_1, & s_2, & \ldots, & s_{k-1}, & s_k, & t_{k+1}, & \ldots, & s_q \\ t_1, & t_2, & \ldots, & t_{k-1}, & t_k, & t_{k+1}, & \ldots, & t_q \end{pmatrix}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, q).$$

Pour la seconde équation, on a

$$\Psi_k(t) = (-1)^{k-1} \frac{D_q\begin{pmatrix} s_1, & s_2, & \ldots, & s_{k-1}, & s_k, & s_{k+1}, & \ldots, & s_q \\ t_1, & t_2, & \ldots, & t_{k+1}, & t, & t_{k+1}, & \ldots, & t_q \end{pmatrix}}{D_q\begin{pmatrix} s_1, & s_2, & \ldots, & s_{k-1}, & s_k, & s_{k+1}, & \ldots, & s_q \\ t_1, & t_2, & \ldots, & t_{k-1}, & t_k, & t_{k+1}, & \ldots, & t_q \end{pmatrix}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, q).$$

Il n'y a pas d'autres solutions indépendantes des équations (8). On appelle les $2q$ fonctions

$$\begin{matrix} \Phi_1(s), & \Phi_2(s), & \ldots, & \Phi_q(s), \\ \Psi_1(t), & \Psi_2(t), & \ldots, & \Psi_q(t) \end{matrix}$$

les *solutions fondamentales relatives à* λ_1.

Il y aura une solution de la première des équations avec second membre (1) pour $\lambda = \lambda_1$, pourvu que les q conditions

$$\int f(s)\,\Psi_1(s)\,ds = 0, \qquad \int f(s)\,\Psi_2(s)\,ds = 0, \qquad \ldots, \qquad \int f(s)\,\Psi_q(s)\,ds = 0$$

soient remplies. Cette solution aura pour expression

$$(9_1) \qquad \varphi(s) = f(s) + \lambda \int g(s, t)\,f(t)\,dt + \sum a_k \Phi_k(s),$$

où

$$g(s, t) = \frac{D_{q+1}\begin{pmatrix} s, & s_1, & s_2, & \ldots, & s_q \\ t, & t_1, & t_2, & \ldots, & t_q \end{pmatrix}}{D_q\begin{pmatrix} s_1, & s_2, & \ldots, & s_q \\ t_1, & t_2, & \ldots, & t_q \end{pmatrix}}.$$

Les coefficients a_k étant arbitraires, cette solution a le degré q d'indétermination.

Il y aura une solution pareille de la seconde équation dans les conditions correspondantes.

Il a été supposé que le noyau $K(s, t)$ était fini. Des travaux de MM. Fredholm, Hilbert et Plemelj il résulte qu'on peut appliquer toute la théorie précédente lorsque $K(s, t)$ devient infini, pourvu que ses singularités soient d'un ordre plus petit que l'unité.

Enfin on peut supposer que $K(s, t)$ ou que le chemin d'intégration soient complexes.

§ 2. — Combinaison de deux noyaux orthogonaux [1].

4. Deux noyaux $K_1(s, t)$, $K_2(s, t)$ sont dits *orthogonaux* lorsqu'ils satisfont aux relations

$$(10) \qquad \int K_1(s, \tau) K_2(\tau, t)\, d\tau = \int K_2(s, \tau) K_1(\tau, t)\, d\tau = 0.$$

Nous allons démontrer que *la résolvante de*

$$K(s, t) = K_1(s, t) + K_2(s, t)$$

est la somme des résolvantes de $K_1(s, t)$ *et de* $K_2(s, t)$:

$$K(s, t, \lambda) = K_1(s, t, \lambda) + K_2(s, t, \lambda).$$

Écrivons les deux formules

$$(11) \qquad \begin{cases} -K_1(s, t) + K_1(s, t, \lambda) = \lambda \int K_1(s, \tau) K_1(\tau, t, \lambda)\, d\tau \\ \qquad\qquad = \lambda \int K_1(\tau, t) K_1(s, \tau, \lambda)\, d\tau, \end{cases}$$

$$(12) \qquad \begin{cases} -K_2(s, t) + K_2(s, t, \lambda) = \lambda \int K_2(s, \tau) K_2(\tau, t, \lambda)\, d\tau \\ \qquad\qquad = \lambda \int K_2(\tau, t) K_2(s, \tau, \lambda)\, d\tau. \end{cases}$$

---

[1] M. Goursat a trouvé plusieurs des résultats démontrés dans cet article et dans le suivant. Il les a publiés dans les *Comptes rendus*, octobre et novembre 1907. J'avais, de mon côté, fait cette Communication à M. Picard à la fin du mois de juin 1907. (*Voir* la Note de M. Picard dans les *Comptes rendus*, au sujet de ma Communication, le 25 novembre, p. 909.)

De (11) et (12) dérivent les équations

$$\int K_2(s,\tau)K_1(\tau,t,\lambda)\,d\tau = \int K_2(\tau,t)K_1(s,\tau,\lambda)\,d\tau = 0,$$

$$\int K_1(s,\tau)K_2(\tau,t,\lambda)\,d\tau = \int K_1(\tau,t)K_2(s,\tau,\lambda)\,d\tau = 0,$$

d'où l'on obtient, en les combinant avec (11) et (12),

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} -K_1(s,t)+K_1(s,t,\lambda) &= \lambda\int K(s,\tau)K_1(\tau,t,\lambda)\,d\tau \\ &= \lambda\int K(\tau,t)K_1(s,\tau,\lambda)\,d\tau, \end{aligned}\right.$$

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} -K_2(s,t)+K_2(s,t,\lambda) &= \lambda\int K(s,\tau)K_2(\tau,t,\lambda)\,d\tau \\ &= \lambda\int K(\tau,t)K_2(t,\tau,\lambda)\,d\tau. \end{aligned}\right.$$

L'addition de (13) et (14) nous donne

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &-[K_1(s,t)+K_2(s,t)]+[K_1(s,t,\lambda)+K_2(s,t,\lambda)] \\ &\quad = \lambda\int K(s,\tau)\,[K_1(\tau,t,\lambda)+K_2(\tau,t,\lambda)]\,d\tau \\ &\quad = \lambda\int K(\tau,t)\,[K_1(s,\tau,\lambda)+K_2(s,\tau,\lambda)]\,d\tau, \end{aligned}\right.$$

équations qui déterminent la somme $K_1(s,t,\lambda)+K_2(s,t,\lambda)$.

Or, $K(s,t,\lambda)$ est déterminé par les équations

$$\begin{aligned} -K(s,t)+K(s,t,\lambda) &= \lambda\int K(s,\tau)K(\tau,t,\lambda)\,d\tau \\ &= \lambda\int K(\tau,t)K(s,\tau,\lambda)\,d\tau, \end{aligned}$$

qui sont identiques à (15).

Puisque ces équations ont une solution unique, il faut que nous ayons

$$K(s,t,\lambda) = K_1(s,t,\lambda)+K_2(s,t,\lambda).$$

5. *Le déterminant de* $K(s,t)$ *est le produit des déterminants de* $K_1(s,t)$ *et de* $K_2(s,t)$.

Pour le démontrer, revenons à l'équation (4); elle nous donne

$$(16)\qquad \int K(s, s, \lambda)\, ds = -\frac{1}{D(\lambda)}\frac{d}{d\lambda}D(\lambda) = -\frac{d}{d\lambda}[\log D(\lambda)].$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}[\log D(\lambda)] &= -\int K(s, s, \lambda)\, d\lambda \\ &= -\int [K_1(s, s, \lambda) + K_2(s, s, \lambda)]\, d\lambda \\ &= \frac{d}{d\lambda}[\log D_1(\lambda) + \log D_2(\lambda)] \\ &= \frac{d}{d\lambda}\{\log[D_1(\lambda) \times D_2\lambda]\},\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$D(\lambda) = C \times D_1(\lambda) \times D_2(\lambda).$$

Pour achever, il faut démontrer que la constante C est égale à l'unité. Il suffit de faire $\lambda = 0$:

$$D(0) = 1 = D_1(0) \times D_2(0).$$

Donc

$$(17)\qquad D(\lambda) = D_1(\lambda) \times D_2(\lambda).$$

6. De la dernière proposition il résulte que, si λ_1 est une constante caractéristique de $K(s, t)$, elle sera aussi une constante caractéristique *ou* de $K_1(s, t)$ *ou* de $K_2(s, t)$, *ou* de $K_1(s, t)$ *et* de $K_2(s, t)$. Prenons la dernière hypothèse qui renferme les autres comme cas particuliers.

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition suivante :

Les solutions de l'équation

$$(18)\qquad \varphi_1(s) - \lambda_1 \int K_1(s, t)\, \varphi_1(t)\, dt = 0$$

et les solutions de l'équation

$$(19)\qquad \varphi_2(s) - \lambda_1 \int K_2(s, t)\, \varphi_2(t)\, dt = 0$$

sont aussi des solutions de

$$(20) \qquad \varphi(s) - \lambda_1 \int K(s, t)\varphi(t)\,dt = 0.$$

Les solutions de (20) *sont des fonctions linéaires des solutions de* (18) *et de* (19).

Nous multiplions l'équation (18) par $K_2(r, s)$ et nous intégrons :

$$\int K_2(r, s)\varphi_1(s)\,ds = \lambda_1 \int\int K_2(r, s) K_1(s, t)\,\varphi_1(t)\,ds\,dt = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}\varphi_1(s) - \lambda_1 \int K(s, t)\varphi_1(t)\,dt \\ = \varphi_1(s) - \lambda_1 \int K_1(s, t)\varphi_1(t)\,dt - \lambda_1 \int K_2(s, t)\varphi_1(t)\,dt = 0.\end{aligned}$$

Il en résulte que $\varphi_1(s)$ est une solution de l'équation (20). De même $\varphi_2(s)$ est aussi une solution de (20).

Maintenant, soit $\varphi(s)$ une solution quelconque de (20).

Mettons

$$(21) \qquad \begin{cases} \lambda_1 \int K_1(s, t)\varphi(t)\,dt = \varphi_1'(s), \\ \varphi(s) = \varphi_1'(s) + \varphi_2'(s). \end{cases}$$

Je vais démontrer que $\varphi_1'(s)$, $\varphi_2'(s)$ sont des solutions de (18) et de (19) respectivement.

Des équations (20) et (21) on tire

$$(22) \qquad \varphi_2'(s) = \lambda_1 \int K_2(s, t)\varphi(t)\,dt,$$

d'où il résulte

$$\int K_1(s, t)\varphi_2'(t)\,dt = \lambda_1 \int\int K_1(s, t) K_2(t, \tau)\varphi(\tau)\,dt\,d\tau = 0,$$

et, d'après (21),

$$\varphi_1'(s) - \lambda_1 \int K_1(s, t)\varphi_1'(t)\,dt = \lambda_1 \int K_1(s, t)\,\varphi_2'(t)\,dt = 0,$$

c'est-à-dire que $\varphi_1'(s)$ est une solution de (18).

De la même manière, en nous servant de (22), nous pouvons démontrer que $\varphi_2'(s)$ est une solution de (19).

Il est facile de voir que les solutions des équations avec seconds membres

$$\varphi(s) - \lambda \int K(s, t)\;\varphi(t)\;dt = f(s),$$

$$\varphi_1(s) - \lambda \int K_1(s, t)\,\varphi_1(t)\,dt = f(s),$$

$$\varphi_2(s) - \lambda \int K_2(s, t)\,\varphi_2(t)\,dt = f(s)$$

satisfont à la relation

$$\varphi(s) + f(s) = \varphi_1(s) + \varphi_2(s).$$

§ 3. — Partie du noyau relative à une constante caractéristique.

7. Nous allons d'abord étudier *la continuité de la résolvante* $K(s, t, \lambda)$. Supposons que $K(s, t)$ soit une fonction finie et continue de s, t; $K(s, t, \lambda)$ sera aussi une fonction finie et continue de s, t pour toute valeur régulière de λ.

Nous remarquons que, si $K(s, t, \lambda)$ a des discontinuités autres que ses pôles en λ, ces discontinuités sont indépendantes de λ. Donc il suffira de démontrer que $K(s, t, \lambda)$ est continu en s, t lorsque $|\lambda| < \frac{1}{M}$, M étant la limite supérieure de $|K(s, t)|$. Nous avons vu (§ 1) que $\frac{1}{M}$ était au plus égal au module de la première constante caractéristique.

Donc la série

$$(23)\quad K(s, t, \lambda) = K_1(s, t) + \lambda K_2(s, t) + \ldots + \lambda^{n-1} K_n(s, t) + r_n(s, t, \lambda)$$

est uniformément convergente. Nous pouvons toujours trouver le

nombre entier n_0, tel que lorsque $n \geqq n_0$ nous aurons

$$|r_n(s, t, \lambda)| \leqq \varepsilon,$$

où ε est un nombre positif aussi petit qu'on veut, et indépendant de s, t.

Le noyau $K(s, t)$ étant continu, nous pouvons trouver h tel que

$$|K(s+h, t) - K(s, t)| < \varepsilon.$$

Le noyau réitéré $K_n(s, t)$ est continu aussi, et satisfait à l'inégalité

$$\begin{aligned} &|K_n(s+h, t) - K_n(s, t)| \\ &\quad = \left| \int [K(s+h, t) - K(s, t)]\, K_{n-1}(\tau, t)\, d\tau \right| \leqq M^{n-1}\varepsilon, \end{aligned}$$

puisque $|K_n| \leqq M^n$, d'après le § 1

Donc nous avons

$$\begin{aligned} &|K(s+h, t, \lambda) - K(s, t, \lambda)| \\ &\quad \leqq \left| \sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} [K_k(s+h, t) - K_k(s, t)] \right| + |r_n(s+h, t, \lambda) - r_n(s, t, \lambda)| \\ &\quad \leqq \sum_{k=1}^{n} |\lambda^{k-1}|\, M^{k-1}\varepsilon + 2\varepsilon \\ &\quad \leqq \varepsilon\left(2 + \frac{1}{1 - |\lambda| M}\right), \end{aligned}$$

puisque $|\lambda| M < 1$.

Il en résulte que $K(s, t, \lambda)$ est une fonction continue de s quelle que soit la valeur de t. On démontre de la même manière que $K(s, t, \lambda)$ est une fonction continue de t quelle que soit la valeur de s.

Les noyaux discontinus auxquels on a jusqu'ici appliqué la théorie de Fredholm sont tels qu'à partir d'un certain noyau réitéré $K(s, t)$ tous les noyaux réitérés sont finis. Dans ces conditions l'étude précédente nous permet d'affirmer que *la résolvante* $K(s, t, \lambda)$ *ne peut avoir de discontinuités que pour les valeurs de* s, t *qui rendent* $K(s, t)$ *discontinu*, où l'on suppose toujours que λ ait une valeur régu-

lière. Ceci résulte de ce que les noyaux réitérés sont discontinus seulement pour les valeurs de s, t qui rendent $K(s, t)$ discontinu.

8. Soit λ_1 une constante caractéristique quelconque du noyau $K(s, t)$. Si les lettres p, q, r représentent respectivement la multiplicité du zéro λ_1, du déterminant $D(\lambda)$, le nombre de solutions fondamentales relatives à λ_1, et la multiplicité du pôle λ_1 de la résolvante $K(s, t, \lambda)$, je peux démontrer l'inégalité suivante :

$$r + q \leqq p + 1. \tag{24}$$

Les conditions du § 1 nous donnent

$$D_1\begin{pmatrix} s_1 \\ t_1 \end{pmatrix}\lambda_1 = 0, \quad D_2\begin{pmatrix} s_1, s_2, \\ t_1, t_2, \end{pmatrix}\lambda_1 = 0, \quad \ldots, \quad D_{q-1}\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_{q-1} \\ t_1, t_2, \ldots, t_{q-1} \end{pmatrix}\lambda_1 = 0,$$

$$D_q\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_{q-1}, s_q \\ t_1, t_2, \ldots, t_{q-1}, t_q \end{pmatrix}\lambda_1 \neq 0.$$

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_{q-1}, p_q (= 0)$ les degrés de multiplicité du zéro λ_1 pour ces fonctions $D_1, D_2, \ldots, D_{q-1}, D_q$ respectivement.

Nous avons $r = p - p_1$.

On obtient facilement les formules suivantes analogues à (4) :

$$\int D_1\begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix}\lambda\, ds = -\frac{d}{d\lambda} D_0(\lambda),$$

$$\int D_2\begin{pmatrix} s, s_1 \\ s, t_1 \end{pmatrix}\lambda\, ds = -\frac{d}{d\lambda} D_1\begin{pmatrix} s_1 \\ t_1 \end{pmatrix}\lambda,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\int D_{q-1}\begin{pmatrix} s, s_1, \ldots, s_{q-2} \\ s, t_1, \ldots, t_{q-2} \end{pmatrix}\lambda\, ds = -\frac{d}{d\lambda} D_{q-2}\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_{q-2} \\ t_1, t_2, \ldots, t_{q-2} \end{pmatrix}\lambda.$$

De ces formules résultent les inégalités

$$p - 1 \geqq p_1, \qquad p_1 - 1 \geqq p_2, \qquad \ldots, \qquad p_{q-2} - 1 \geqq p_{q-1},$$

c'est-à-dire

$$p \geqq p_1 + 1 \geqq p_2 + 2 \geqq \ldots \geqq p_{q-2} + q - 2 \geqq p_{q-1} + q - 1 \geqq q.$$

Donc on a

$$p_1 + 1 \geqq q,$$

et, par conséquent,

$$r + q \leqq p + 1.$$

9. Dans le voisinage du pôle λ_1 nous pouvons écrire $K(s, t, \lambda)$ sous la forme

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} K(s, t, \lambda) &= \frac{\varphi_r(s, t)}{(\lambda_1 - \lambda)^r} + \frac{\varphi_{r-1}(s, t)}{(\lambda_1 - \lambda)^{r-1}} + \ldots + \frac{\varphi_1(s, t)}{(\lambda_1 - \lambda)} + \varphi_0(s, t, \lambda) \\ &= \chi(s, t, \lambda) + \varphi_0(s, t, \lambda). \end{aligned} \right.$$

Nous appelons $\chi(s, t, \lambda)$ *la partie de la résolvante relative à la constante caractéristique* λ_1 ; nous appelons la fonction

$$(27) \qquad \chi(s, t) = \chi(s, t, 0) = \frac{\varphi_r(s, t)}{\lambda_1^r} + \frac{\varphi_{r-1}(s, t)}{\lambda_1^{r-1}} + \ldots + \frac{\varphi_1(s, t)}{\lambda_1}$$

la partie du noyau $K(s, t)$ *relative à* λ_1.

Si $K(s, t)$ est continu, les fonctions $\varphi_1(s, t)$, $\varphi_2(s, t)$, $\ldots$, $\varphi_r(s, t)$ seront également continues. Pour le démontrer traçons dans le plan des λ un contour C, qui renferme λ_1, mais qui ne renferme pas d'autres constantes caractéristiques. Nous aurons

$$(28) \qquad \varphi_\nu(s, t) = \frac{-1}{2\pi i} \int_C (\lambda_1 - \lambda)^{\nu-1} K(s, t, \lambda)\, d\lambda.$$

La résolvante $K(s, t, \lambda)$ étant continue sur le contour, il faut que $\varphi_\nu(s, t)$ soit continu. En général, lorsque $K(s, t)$ a des discontinuités, $\varphi_\nu(s, t)$ ne peut avoir de discontinuités que pour les mêmes valeurs de s, t.

10. Rappelons maintenant la formule (16) :

$$(16) \qquad \int K(s, s, \lambda)\, ds = -\frac{d}{d\lambda}[\log D(\lambda)].$$

Puisque λ_1 est un zéro de $D(\lambda)$ d'ordre p, nous avons

$$D(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^p\, D'(\lambda),$$

où

$$D'(\lambda_1) \neq 0.$$

Donc

$$\frac{d}{d\lambda}[\log D(\lambda)] = -\frac{p}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{d}{d\lambda}[\log D'(\lambda)].$$

L'expression $\frac{d}{d\lambda}[\log D'(\lambda)]$ reste finie lorsque λ tend vers λ_1, et nous tirons de (16) l'équation

$$(29) \qquad \lim_{\lambda=\lambda_1} (\lambda_1 - \lambda) \int K(s, s, \lambda)\, ds = +p.$$

De (26) et (29) il résulte que

$$(30) \qquad \begin{cases} \int \varphi_r(s, s)\, ds = 0, & \int \varphi_{r-1}(s, s)\, ds = 0, \quad \ldots, \\ \int \varphi_2(s, s)\, ds = 0, & \int \varphi_1(s, s)\, ds = p. \end{cases}$$

11. Nous écrivons maintenant les équations (2) sous la forme suivante :

$$(31) \qquad \begin{cases} -K(s, t) + K(s, t, \lambda) \\ \quad = (\lambda - \lambda_1) \int K(s, \tau)\, K(\tau, t, \lambda)\, d\tau + \lambda_1 \int K(s, \tau)\, K(\tau, t, \lambda)\, d\tau \\ \quad = (\lambda - \lambda_1) \int K(s, \tau, \lambda)\, K(\tau, t)\, d\tau + \lambda_1 \int K(s, \tau, \lambda)\, K(\tau, t)\, d\tau. \end{cases}$$

Si nous substituons ensuite l'expression de $K(s, t, \lambda)$ tirée de (26) dans les équations (31), nous aurons le droit d'égaler les coefficients de $(\lambda_1 - \lambda)^{-1}$, $(\lambda_1 - \lambda)^{-2}$, ..., $(\lambda_1 - \lambda)^{-r}$ dans les trois membres. Ceci nous donne

$$(32) \qquad \varphi_r(s, t) = \lambda_1 \int K(s, \tau)\, \varphi_r(\tau, t)\, d\tau = \lambda_1 \int K(\tau, t)\, \varphi_r(s, \tau)\, d\tau,$$

$$(33) \qquad \begin{cases} \varphi_{r-1}(s, t) = \lambda_1 \int K(s, \tau)\, \varphi_{r-1}(\tau, t)\, d\tau - \int K(s, \tau)\, \varphi_r(\tau, t)\, d\tau \\ \qquad = \lambda_1 \int K(\tau, t)\, \varphi_{r-1}(s, \tau)\, d\tau - \int K(\tau, t)\, \varphi_r(s, \tau)\, d\tau, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

et

$$(34)\quad \begin{cases} \varphi_1(s,t) = \lambda_1 \int K(s,\tau)\varphi_1(\tau,t)\,d\tau - \int K(s,\tau)\varphi_2(\tau,t)\,d\tau \\ \qquad = \lambda_1 \int K(\tau,t)\varphi_1(s,\tau)\,d\tau - \int K(\tau,t)\varphi_2(s,\tau)\,d\tau, \end{cases}$$

$$(35)\quad \begin{cases} \varphi_0(s,t,\lambda) - K(s,t) \\ \quad = \lambda \int K(s,\tau)\varphi_0(\tau,t,\lambda)\,d\tau - \int K(s,\tau)\varphi_1(\tau,t)\,d\tau \\ \quad = \lambda \int K(\tau,t)\varphi_0(s,\tau,\lambda)\,d\tau - \int K(\tau,t)\varphi_1(s,\tau)\,d\tau. \end{cases}$$

On transforme ces équations aux formes suivantes :

$$(36)\qquad \int K(s,\tau)\varphi_r(\tau,t)\,d\tau = \int K(\tau,t)\varphi_r(s,\tau)\,d\tau = \frac{\varphi_r(s,t)}{\lambda_1},$$

$$(37)\quad \begin{cases} \int K(s,\tau)\varphi_{r-1}(\tau,t)\,d\tau = \int K(\tau,t)\varphi_{r-1}(s,\tau)\,d\tau \\ \qquad\qquad = \frac{\varphi_{r-1}(s,t)}{\lambda_1} + \frac{\varphi_r(s,t)}{\lambda_1^2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

$$(38)\quad \begin{cases} \int K(s,\tau)\varphi_1(\tau,t)\,d\tau = \int K(\tau,t)\varphi_1(s,\tau)\,d\tau \\ \qquad\qquad = \frac{\varphi_1(s,t)}{\lambda_1} + \frac{\varphi_2(s,t)}{\lambda_1^2} + \ldots + \frac{\varphi_r(s,t)}{\lambda_1^r} \\ \qquad\qquad = \chi(s,t), \end{cases}$$

$$(39)\quad \begin{cases} \lambda \int K(s,\tau)\varphi_0(\tau,t,\lambda)\,d\tau = \lambda \int K(\tau,t)\varphi_0(s,t,\lambda)\,d\tau \\ \qquad\qquad = -K(s,t) + \varphi_0(s,t,\lambda) \\ \qquad\qquad\quad + \frac{\varphi_1(s,t)}{\lambda_1} + \ldots + \frac{\varphi_r(s,t)}{\lambda_1^r} \\ \qquad\qquad = \varphi_0(s,t,\lambda) - \varphi_0(s,t,0). \end{cases}$$

On multiplie ensuite l'équation (2) du § 1 par $\varphi_r(t,r)$ et on l'intègre par rapport à t. En se servant de (36) on a, après un léger changement de notation,

$$(40)\quad \int K(s,\tau,\lambda)\varphi_r(\tau,t)\,d\tau = \int K(\tau,t,\lambda)\varphi_r(s,\tau)\,d\tau = \frac{\varphi_r(s,t)}{\lambda_1 - \lambda}.$$

Et de la même manière on obtient les autres équations

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned}&\int K(s,\tau,\lambda)\,\varphi_{r-1}(\tau,t)\,d\tau=\int K(\tau,t,\lambda)\,\varphi_{r-1}(s,\tau)\,d\tau\\&\qquad=\frac{\varphi_{r-1}(s,t)}{\lambda_1-\lambda}+\frac{\varphi_r(s,t)}{(\lambda_1-\lambda)^2},\end{aligned}\right.$$

. . . . ,

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned}&\int K(s,\tau,\lambda)\,\varphi_1(\tau,t)\,d\tau=\int K(\tau,t,\lambda)\,\varphi_1(s,\tau)\,d\tau\\&\qquad=\frac{\varphi_1(s,t)}{\lambda_1-\lambda}+\frac{\varphi_2(s,t)}{(\lambda_1-\lambda)^2}+\ldots+\frac{\varphi_r(s,t)}{(\lambda_1-\lambda)^r}\\&\qquad=\chi(s,t,\lambda).\end{aligned}\right.$$

On se sert de nouveau de l'équation (26) pour séparer dans les équations (40), (41), (42) les coefficients de $\frac{1}{\lambda_1-\lambda}$, $\frac{1}{(\lambda_1-\lambda)^2}$, …, $\frac{1}{(\lambda_1-\lambda)^r}$, et l'on obtient ainsi une série d'équations qui se résument sous la forme suivante :

$$(43)\quad \begin{aligned}\int\varphi_m(s,\tau)\,\varphi_n(\tau,t)\,d\tau=\int\varphi_n(s,\tau)\,\varphi_m(\tau,t)\,d\tau&=0\\ &\text{si } m+n>r+1,\\ =\varphi_{m+n-1}(s,t),&\\ &\text{si } m+n\leqq r+1,\end{aligned}$$

$$(44)\quad \int\varphi_m(s,\tau)\,\varphi_0(\tau,t,\lambda)\,d\tau=\int\varphi_0(s,\tau,\lambda)\,\varphi_m(\tau,t)\,d\tau=0,\quad \text{pour toute valeur de } m.$$

11. A l'aide de (11) on peut démontrer que les deux parties de

$$K(s,t)=\chi_0(s,t)+\varphi_0(s,t,0)$$

sont orthogonales. On a, pour toute valeur régulière de λ, μ,

$$(44_1)\quad \int\chi(s,\tau,\lambda)\,\varphi_0(\tau,t,\mu)\,d\tau=\int\varphi_0(s,\tau,\mu)\,\chi(\tau,t,\lambda)\,d\tau=0.$$

Faisant $\lambda=0$, $\mu=\lambda$, nous avons, d'après (39),

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned}&-\varphi_0(s,t,0)+\varphi_0(s,t,\lambda)=\lambda\int\varphi_0(s,\tau,0)\,\varphi_0(\tau,t,\lambda)\,d\tau\\&\qquad=\lambda\int\varphi_0(\tau,t,0)\,\varphi_0(s,t,\lambda)\,d\tau,\end{aligned}\right.$$

et, d'après (2),

$$(46)\quad \begin{cases} -\chi(s,t)+\chi(s,t,\lambda)=\lambda\int\chi(s,\tau)\chi(\tau,t,\lambda)\,d\tau \\ \qquad\qquad\qquad\qquad =\lambda\int\chi(\tau,t)\chi(s,\tau,\lambda)\,d\tau. \end{cases}$$

On peut donc dire que les fonctions $\varphi_0(s,t,0)$ et $\chi(s,t)$ sont orthogonales et ont respectivement pour résolvantes des fonctions $\varphi_0(s,t,\lambda)$, $\chi(s,t,\lambda)$. Il résulte que nous pouvons appliquer les considérations du § 2, et que *nous pouvons considérer à part la partie* $\chi(s,t)$ *du noyau* $K(s,t)$ *relative à* λ_1.

Le déterminant de $\chi(s,t)$ est donné par

$$\frac{d}{d\lambda}[\log D'(\lambda)]=-\int\chi(s,s,\lambda)\,ds=\frac{-p}{\lambda_1-\lambda}=\frac{p}{\lambda-\lambda_1}.$$

Par conséquent,

$$D'(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^p\times\text{const.}$$

Mais

$$D'(0)=1,$$

et l'on a

$$(47)\qquad D'(\lambda)=\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^p.$$

C'est *le facteur du déterminant* $D(\lambda)$ *de* $K(s,t)$ *relatif à la partie* $\chi(s,t)$.

On peut démontrer que les parties du noyau relatives à deux constantes caractéristiques sont orthogonales.

Soient $\chi_1(s,t)$, $\chi_2(s,t)$ les parties du noyau $K(s,t)$ relatives à λ_1, λ_2; soient $\chi_1(s,t,\lambda)$, $\chi_2(s,t,\lambda)$ les parties correspondantes de la résolvante. On a

$$K(s,t,\lambda)=\chi_1(s,t,\lambda)+\chi_2(s,t,\lambda)+\varphi'_0(s,t,\lambda),$$

et, en appliquant les formules (44_1),

$$\int\chi_1(s,\tau)[\chi_2(\tau,t,\lambda)+\varphi'_0(\tau,t,\lambda)]\,dt$$
$$=\int\chi_1(\tau,t)[\chi_2(s,\tau,\lambda)+\varphi'_0(s,\tau,\lambda)]\,d\tau=0.$$

La fonction $\varphi'_0(s, t, \lambda)$ reste finie lorsque λ s'approche de λ_2; donc, en se souvenant de la forme de $\chi_2(s, t, \lambda)$, on aura

$$\int \chi_1(s, \tau)\chi_2(\tau, t, \lambda)\,d\tau = \int \chi_1(\tau, t)\chi_2(s, \tau, \lambda)\,d\tau = 0.$$

Faisant $\lambda = 0$,

$$(47_1) \qquad \int \chi_1(s, \tau)\chi_2(\tau, t)\,d\tau = \int \chi_1(\tau, t)\chi_2(s, \tau)\,d\tau = 0.$$

Nous avons donc démontré que $\chi_1(s, t)$, $\chi_2(s, t)$ sont orthogonales.

§ 4. — Fonctions fondamentales.

12. Envisageons maintenant la fonction $\varphi_r(s, t)$. L'équation (32) indique qu'elle est une solution de chacune des équations associées de Fredholm sans second membre pour $\lambda = \lambda_1$. Donc, considérée comme une fonction de s, $\varphi_r(s, t)$ est la somme de q fonctions indépendantes au plus. De même, considérée comme une fonction de t, $\varphi_r(s, t)$ est la somme de q fonctions indépendantes au plus. Nous pouvons écrire $\varphi_r(s, t)$ sous la forme

$$\varphi_r(s, t) = \sum_{k=1}^{q} \xi_k(s)\,\eta_k(t).$$

D'après l'équation (33) on voit que $\varphi_{r-1}(s, t)$ est une solution de chacune de deux équations associées de Fredholm, avec second membre, pour $\lambda = \lambda_1$. Les conditions du § I pour l'existence des solutions sont nécessairement remplies, d'après (48). La forme des équations (9_1) démontre que $\varphi_{r-1}(s, t)$ est aussi la somme d'un nombre fini de produits :

$$\varphi_{r-1}(s, t) = \sum_{k=1}^{2q} \xi'_k(s)\,\eta'(t).$$

Nous examinons de proche en proche toutes les fonctions $\varphi_{r-2}(s, t)$, $\varphi_{r-3}(s, t)$, ..., $\varphi_1(s, t)$, et nous trouvons enfin que $\varphi_1(s, t)$ est aussi la

somme d'un nombre fini de produits :

$$\varphi_1(s,t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(s)\,\psi_k(t).$$

Nous substituons cette expression dans une des équations (43) :

$$\int \varphi_1(s,\tau)\,\varphi_1(\tau,t)\,d\tau = \varphi_1(s,t).$$

Il en résulte

$$\sum_k \sum \varphi_k(s)\,\psi_j(t) \int \varphi_j(\tau)\,\psi_k(\tau)\,d\tau = \sum_k \varphi_k(s)\,\psi_k(t).$$

Nous supposons que les fonctions $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s)$ sont indépendantes, et que les fonctions $\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$ sont aussi indépendantes. Dans ces conditions nous égalons les coefficients de $\varphi_k(s)\,\psi_j(t)$ dans les deux membres. Ceci nous donne les relations

$$(48) \qquad \left\{ \begin{aligned} \int \varphi_k(s)\,\psi_j(s)\,ds &= 0 \qquad \text{si} \qquad k \neq j, \\ &= 1 \qquad \text{si} \qquad k = j, \\ \int \varphi_1(s,s)\,ds &= n. \end{aligned} \right.$$

Rappelons une des équations (30),

$$\int \varphi_1(s,s)\,ds = p,$$

où p est le degré du zéro λ_1 de $D(\lambda)$.

Nous avons $n = p$,

$$(48_1) \qquad \varphi_1(s,t) = \sum_{1}^{p} \varphi_k(s)\,\psi_k(t);$$

nous appelons les $2p$ fonctions

$$(49) \qquad \left\{ \begin{matrix} \varphi_1(s), & \varphi_2(s), & \ldots, & \varphi_p(s), \\ \psi_1(t), & \psi_2(t), & \ldots, & \psi_p(t) \end{matrix} \right.$$

fonctions fondamentales relatives à λ_1.

Si un zéro de degré p de $D(\lambda)$ est considéré comme p zéros distincts, on peut dire qu'*une paire de fonctions fondamentales correspond à chaque zéro de* $D(\lambda)$.

Les fonctions fondamentales relatives à λ_1 satisfont aux équations (48). Elles constituent *un système biorthogonal*.

15. Considérons maintenant la fonction $\varphi_2(s, t)$; d'après (43), on a

$$\int \varphi_2(s, \tau)\varphi_1(\tau, t)\,d\tau = \int \varphi_1(s, \tau)\varphi_2(\tau, t)\,d\tau = \varphi_2(s, t). \tag{50}$$

Il est clair que $\varphi_2(s, t)$ est une fonction linéaire homogène de $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_p(s)$ et aussi de $\psi_1(t), \ldots, \psi_p(t)$. On peut écrire

$$\varphi_2(s, t) = \sum_{jk}^{p} a_{jk}\varphi_j(s)\psi_k(t). \tag{51}$$

Les équations (50) sont ainsi vérifiées. Et puisque, d'après (30), on a

$$\int \varphi_2(s, s)\,ds = 0,$$

il faut que l'on ait

$$\sum a_{kk} = 0. \tag{51$_1$}$$

Les autres fonctions $\varphi_3(s, t), \ldots, \varphi_r(s, t)$ s'expriment maintenant à l'aide des équations (43) en fonctions de $\varphi_1(s), \ldots, \psi_1(t), \ldots, a_{11}, a_{12}, \ldots$. On a

$$(52)\quad \begin{cases} \varphi_3(s, t) = \displaystyle\sum_{ijk}^{1,p} a_{ij}\,a_{jk}\,\varphi_i(s)\,\psi_k(t), \\ \varphi_4(s, t) = \displaystyle\sum_{ijkl}^{1,p} a_{ij}\,a_{jk}\,a_{kl}\,\varphi_i(s)\,\psi_l(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_r(s, t) = \displaystyle\sum_{i_1 i_2 \ldots i_{r-1} i_r}^{1,p} a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \ldots a_{i_{r-1} i_r}\,\varphi_{i_1}(s)\,\psi_{i_r}(t). \end{cases}$$

Mais il faut en même temps, à cause des équations (30), que les coeffi-

cients a_{11}, a_{12}, ... satisfassent à certaines conditions, à savoir :

$$(53)\quad \begin{cases} \sum_{ik} a_{ik}a_{ki} = 0, \\ \sum_{ijk} a_{ij}a_{jk}a_{ki} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \sum_{i_1 i_2 \dots i_{r-1}} a_{i_1 i_2}a_{i_2 i_3}\dots a_{i_{r-1} i_1} = 0. \end{cases}$$

On aura aussi, dans les cas où $r < p$, à admettre que tous les coefficients de $\varphi_{r+1}(s, t)$ sont nuls.

14. D'autre part, si nous choisissons $2p$ fonctions $\varphi_1(s)$, ..., $\varphi_p(s)$, $\psi_1(t)$, ..., $\psi_p(t)$ et p^2 coefficients a_{11}, ..., a_{pp} qui satisfont aux conditions précédentes, nous pouvons construire un noyau auquel toute la théorie s'appliquera. Les coefficients ont un haut degré d'indétermination ; en particulier, nous pouvons associer à chaque a_{jk} un même facteur indéterminé μ.

Écrivons $\chi(s, t)$ sous la forme

$$\chi(s, t) = \frac{1}{\lambda_1}\sum_{jk}^{1,p} \alpha_{jk}\,\varphi_j(s)\,\psi_k(t).$$

Je dis que les coefficients de $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ..., $\varphi_p(s)$ sont des fonctions de t linéairement indépendantes. S'il n'en était pas ainsi, il serait possible d'écrire

$$(54)\qquad \chi(s, t) = \sum_{k=1}^{p-1} \varphi'_k(s)\,\psi'_k(t)$$

en somme de $p - 1$ produits. Il est facile de voir que le déterminant du noyau (54) est de degré $p - 1$ au plus. En effet, le coefficient de λ^p dans $D(\lambda)$ est l'intégrale du déterminant

$$\chi\begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_p \\ s_1, s_2, \dots, s_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \chi(s_1, s_1) & \chi(s_1, s_2) & \dots & \chi(s_1, s_p) \\ \chi(s_2, s_1) & \chi(s_2, s_2) & \dots & \chi(s_2, s_p) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \chi(s_p, s_1) & \chi(s_p, s_2) & \dots & \chi(s_p, s_p) \end{vmatrix},$$

qui est identiquement nul. De même, les coefficients de λ^{p+1}, λ^{p+2}, ... s'évanouissent. Mais nous savons que le déterminant du noyau $\chi(s, t)$ est $\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^p$. Donc l'équation (54) est impossible.

Nous voyons donc que les fonctions

$$(55)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_{11}\,\psi_1(t) + \alpha_{12}\,\psi_2(t) + \ldots + \alpha_{1p}\,\psi_p(t), \\ a_{21}\,\psi_1(t) + \alpha_{22}\,\psi_2(t) + \ldots + \alpha_{2p}\,\psi_p(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\ \alpha_{p1}\,\psi_1(t) + \alpha_{p2}\,\psi_2(t) + \ldots + a_{pp}\,\psi_p(t) \end{array}\right.$$

sont linéairement indépendantes. Par conséquent, le déterminant

$$\|\alpha_{mn}\|$$

ne peut pas s'évanouir.

Or, chacun des coefficients α_{mn} est un polynome de degré $r - 1$ au plus en μ, qui est le facteur indéterminé. Donc le déterminant $\|\alpha_{mn}\|$ est un polynome en μ de degré $p(r-1)$ au plus, et dont le terme absolu est l'unité. Puisque le déterminant ne s'évanouit pas et que le polynome ne peut pas avoir de zéros, il faut que ce polynome se réduise à son terme absolu, c'est-à-dire

$$(56)\qquad \|\alpha_{jk}\| = 1.$$

Si l'on développe $\|\alpha_{mn}\|$ en fonction homogène des a_{jk},

$$\|\alpha_{jk}\| = 1 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{p(r-1)},$$

on aura

$$(57)\qquad A_1 = 0, \qquad A_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad A_{p(r-1)} = 0.$$

Les conditions (57) (qui ne sont pas indépendantes) équivalent aux conditions (51_1) et (53).

15. Nous avons vu dans le § I que la fonction $\varphi_1(s, t)$ ne peut avoir que des discontinuités de la même nature que celles de $K(s, t)$. Si $\varphi_1(s, t)$ a une discontinuité au point (s_0, t_0), il faudra soit que l'une des fonctions $\varphi_1(s)$, ..., $\varphi_p(s)$ ait une discontinuité à $s = s_0$, soit

que l'une des fonctions $\psi_1(t), \ldots, \psi_p(t)$ ait une discontinuité à $t = t_0$, à cause de l'équation (48_1). Mais, si $\varphi_0(s)$ est discontinue pour $s = s_0$, la fonction $\varphi_1(s, t)$, et par conséquent le noyau $K(s, t)$, sera discontinue pour $s = s_0$, quel que soit t. Il en résulte le théorème suivant :

Toutes les fonctions fondamentales $\varphi_0(s)$ seront continues au point $s = s_0$, à moins que le noyau $K(s, t)$ ne soit discontinu pour $s = s_0$ indépendamment de t.

En particulier, l'ensemble des noyaux qui deviennent infinis de la même façon que $(s-t)^{-\alpha}$, où $\alpha < 1$, lorsque s tend vers t, mais qui sont ailleurs continus, ont toutes leurs fonctions fondamentales finies et continues.

16. Dans le cas où $K(s, t)$ et λ_1 sont réels, nous pouvons toujours supposer que les fonctions fondamentales sont réelles. En effet, si nous avions la paire complexe

$$\begin{aligned} \varphi_1(s) &= \varphi'(s) + i\varphi''(s), \\ \psi_1(t) &= \psi'(t) + i\psi'(t), \end{aligned}$$

nous aurions la paire conjuguée

$$\begin{aligned} \varphi_2(s) &= \varphi'(s) - i\varphi''(s), \\ \psi_2(t) &= \psi'(t) - i\psi''(t), \end{aligned}$$

et il est facile de voir que nous pourrions remplacer le système complexe

$$\begin{matrix} \varphi_1(s), & \varphi_2(s), \\ \psi_1(t), & \psi_2(t) \end{matrix}$$

par le système réel

$$\begin{matrix} 2\varphi'(s), & -2\varphi''(s), \\ \psi'(t), & \psi''(t), \end{matrix}$$

qui remplit les conditions suffisantes.

17. Nous avons vu que les fonctions fondamentales relatives à une constante caractéristique formaient un système biorthogonal. Nous allons démontrer maintenant que *les fonctions fondamentales relatives à l'ensemble des constantes caractéristiques forment un même système biorthogonal.*

Soient λ_1, λ_2 deux constantes caractéristiques du noyau $K(s, t)$; $\chi_1(s, t)$, $\chi_2(s, t)$, les parties de $K(s, t)$ relatives à λ_1, λ_2, sont orthogonales. Il en résulte que

$$\int \chi_1(s, t, \lambda)\chi_2(\tau, t, \mu)\,d\tau = 0.$$

Séparons le coefficient de $(\lambda_1 - \lambda)^{-1}(\lambda_2 - \mu)^{-1}$ qui est identiquement nul :

$$\int \left[\sum_{k=1}^{p_1} \varphi_k^{(1)}(s)\psi_k^{(1)}(\tau)\right]\left[\sum_{j=1}^{p_2} \varphi_j^{(2)}(\tau)\psi_j^{(2)}(t)\right] d\tau.$$

A cause de l'indépendance des fonctions $\varphi^{(1)}(s)$ et des fonctions $\psi^{(2)}(t)$, on a

$$\int \psi_k^{(1)}(\tau)\varphi_j^{(2)}(\tau)\,d\tau = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p_1); \ (j = 1, 2, \ldots, p_2).$$

De même on a

$$\int \psi_j^{(2)}(\tau)\varphi_k^{(1)}(\tau)\,d\tau = 0.$$

Donc les fonctions fondamentales relatives aux deux constantes caractéristiques λ_1, λ_2 forment un même système biorthogonal, et la généralisation énoncée ci-dessus en résulte immédiatement.

18. Nous considérons maintenant les solutions des équations sans seconds membres

$$\varphi(s) - \lambda_1 \int K(s, t)\varphi(t)\,dt = 0,$$

$$\psi(t) - \lambda_1 \int K(s, t)\psi(s)\,ds = 0.$$

D'après ce qui a été démontré dans le § 2, on voit que les solutions

seront les mêmes que celles de

$$\varphi(s) - \lambda_1 \int \chi(s, t)\varphi(t)\,dt = 0,$$

$$\psi(t) - \lambda_1 \int \chi(s, t)\psi(s)\,ds = 0.$$

Elles seront donc des fonctions linéaires homogènes des fonctions fondamentales

$$\varphi(s) = \sum_{k=1}^{p} \beta_k \varphi_k(s),$$

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \psi_k(t).$$

Ces fonctions seront, en général, en plus petit nombre que les fonctions fondamentales; dans le cas seulement où $r = 1$, il y a coïncidence entre les fonctions fondamentales et les solutions fondamentales; cette catégorie renferme les noyaux symétriques (*voir* Chap. II, § 2).

19. Remarquons enfin que nous aurons plusieurs développements en série intéressants, *dans le cas où ces séries sont uniformément convergentes.*

Le noyau $K(s, t)$ et la résolvante se développent suivant leurs parties :

$$K(s, t) \quad = K_0(s, t) \quad + \chi_1(s, t) \quad + \chi_2(s, t) \quad + \ldots,$$

$$K(s, t, \lambda) = K_0(s, t, \lambda) + \chi_1(s, t, \lambda) + \chi_2(s, t, \lambda) + \ldots,$$

où $K_0(s, t)$ est un noyau sans constante fondamentale et $K_0(s, t, \lambda)$ est sa résolvante.

Les solutions des deux équations associées se développent suivant les fonctions fondamentales

$$\varphi(s) = f(s) + a_1 \varphi_1(s) + a_2 \varphi_2(s) + \ldots,$$

$$\psi(t) = f(t) + b_1 \psi_1(t) + b_2 \psi_2(t) + \ldots.$$

20. Pour compléter ce Chapitre nous allons donner un exemple

d'un noyau dont la résolvante a un pôle double. Un noyau avec le système biorthogonal

$$\varphi_1(s), \quad \varphi_2(s),$$
$$\psi_1(t), \quad \psi_2(t)$$

et la seule constante caractéristique λ_1 aura la forme

$$\begin{aligned}\chi(s,t) = {} & \frac{1}{\lambda_1}\varphi_1(s,t) + \frac{1}{\lambda_1^2}\varphi_2(s,t) \\ = {} & \frac{1}{\lambda_1}[\varphi_1(s)\psi_1(t) + \varphi_2(s)\psi_2(t)] \\ & + \frac{1}{\lambda_1^2}[\quad a_{11}\varphi_1(s)\psi_1(t) + a_{12}\varphi_1(s)\psi_2(t) \\ & \qquad + a_{21}\varphi_2(s)\psi_1(t) + a_{22}\varphi_2(s)\psi_2(t)]\end{aligned}$$

(où nous avons omis un terme qui représenterait une partie du noyau sans constante caractéristique). Pourvu que le second terme ne s'évanouisse pas identiquement, il y aura une seule solution de chacune des équations sans seconds membres, à cause de la relation

$$r + q \leqq p + 1.$$

Les coefficients a doivent satisfaire aux conditions

$$a_{11} + a_{22} = 0,$$
$$a_{11}^2 + 2a_{12}a_{21} + a_{22}^2 = 0.$$

Faisons

$$a_{11} = \alpha\beta, \qquad a_{12} = -\alpha,$$

on trouve

$$a_{22} = -\alpha\beta, \qquad a_{21} = \alpha\beta^2;$$

donc

$$\begin{aligned}\varphi_2(s,t) = {} & \alpha\beta\ \varphi_1(s)\psi_1(t) - \alpha\ \varphi_1(s)\psi_2(t) \\ & + \alpha\beta^2\varphi_2(s)\psi_1(t) - \alpha\beta\varphi_2(s)\psi_2(t) \\ = {} & \alpha[\varphi_1(s) + \beta\varphi_2(s)][\beta\psi_1(t) - \psi_2(t)],\end{aligned}$$

les constantes α, β ayant des valeurs quelconques.

Nous pouvons dire maintenant que le noyau

$$\chi(s,t) = \frac{1}{\lambda_1}[\varphi_1(s)\psi_1(t) + \varphi_2(s)\psi_2(t)] + \frac{\alpha}{\lambda_1^2}[\varphi_1(s) + \beta\varphi_2(s)][\beta\psi_1(t) - \psi_2(t)]$$

a la résolvante

$$\chi(s,t,\lambda) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda}[\varphi_1(s)\psi_1(t) + \varphi_2(s)\psi_2(t)] + \frac{\alpha}{(\lambda_1-\lambda)^2}[\varphi_1(s) + \beta\varphi_2(s)][\beta\psi_1(t) - \psi_2(t)]$$

et les solutions fondamentales

$$\varphi_1(s) + \beta\varphi_2(s), \quad \beta\psi_1(t) - \psi_2(t).$$

Si $\alpha = 0$, il y aura deux paires de solutions fondamentales coïncidant avec les fonctions fondamentales.

Nous donnons les deux exemples particuliers :

$$(0, 2\pi), \quad \chi(s,t) = \frac{1}{\pi\lambda_1}(\sin s \sin t + \cos s \cos t) + \frac{\alpha}{\lambda_1^2}(\sin s + \beta \cos s)(\beta \sin t - \cos t),$$

$$(0, 1), \quad \chi(s,t) = \frac{1}{\lambda_1}[1 - (6s - s)(6t - s)] + \frac{\alpha}{\lambda_1^2}(3s - 2)(3t - 2).$$

CHAPITRE II.

APPLICATIONS DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE.

§ 1. — Nombre de constantes caractéristiques.

1. Il est facile de construire des exemples à l'aide de la théorie exposée dans le Chapitre I. Étant donné un système biorthogonal quelconque, nous pouvons le diviser en groupes de fonctions et, avec

chaque groupe, nous pouvons construire une partie fondamentale à laquelle nous attachons la constante caractéristique que nous voulons. La somme de ces parties, supposée uniformément convergente, est un noyau dont nous connaissons les constantes caractéristiques, les fonctions fondamentales et les solutions fondamentales.

Le problème inverse, consistant à déterminer le système biorthogonal d'un noyau donné, est résolu par la méthode de M. Fredholm. Si nous pouvons séparer le noyau en plusieurs parties orthogonales, chacune de ces parties peut être considérée à part et le problème sera simplifié. Si nous pouvons trouver toutes les parties fondamentales, le problème sera résolu sans avoir recours à la méthode de M. Fredholm.

2. Il y a des noyaux sans constante caractéristique, par exemple la fonction $\frac{\sin s \cos t}{\lambda_1}$ pour l'intervalle $(0, 2\pi)$, ou encore la série supposée convergente

$$\sum_0 a_{mn} \cos ms \sin nt.$$

Les noyaux des équations de Volterra appartiennent aussi à cette classe, car ils satisfont à la relation

$$K(s, t) = 0 \qquad \text{pour} \qquad t \geqq s.$$

Lorsque nous avons séparé les parties relatives à toutes les constantes caractéristiques, il peut rester une partie qui n'a pas de constante caractéristique que nous pouvons appeler la *partie relative à l'infini*.

Donc la forme la plus générale du noyau à n constantes caractéristiques distinctes est

$$(1) \quad K(s, t) = \chi_1(s, t) + \chi_2(s, t) + \chi_3(s, t) + \ldots + \chi_n(s, t) + \chi_\infty(s, t),$$

où $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ sont les parties relatives à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Nous allons examiner maintenant quelques cas où le nombre de constantes caractéristiques est infini.

3. M. Hilbert [1] définit le *noyau fermé* au cas symétrique par la condition qu'il n'existe pas une fonction continue $f(s)$ telle que

$$\int K(s, t) f(t) \, dt = 0. \tag{2}$$

Nous pouvons prendre la même condition pour définir le *noyau asymétrique fermé par rapport à t*.

Nous dirons que le *système biorthogonal*

$$\begin{cases} \varphi_1(s), & \varphi_2(s), & \ldots, & \varphi_n(s), & \ldots, \\ \psi_1(t), & \psi_2(t), & \ldots, & \psi_n(t), & \ldots \end{cases} \tag{3}$$

est *fermé par rapport à t* lorsqu'il n'existe pas de fonction continue $f(s)$ telle que

$$\int \psi_n(s) f(s) \, ds = 0$$

pour toute valeur de n.

Dans ces conditions, nous pouvons démontrer que, *si le système biorthogonal d'un noyau est fermé par rapport à t, le noyau est aussi fermé par rapport à t.*

Supposons, si c'est possible, qu'il existe une fonction $f(s)$ telle que

$$\int K(s, t) f(t) \, dt = 0.$$

Envisageons la constante caractéristique λ_1 à laquelle correspond la partie fondamentale

$$\chi(s, t) = \frac{1}{\lambda_1} \sum_1^p \alpha_{ij} \varphi_i(s) \psi_j(t). \tag{4}$$

Nous écrivons

$$\beta_j = \int \psi_j(t) f(t) \, dt \qquad (j = 1, 2, \ldots, p);$$

---

[1] David Hilbert, *Nach. zu Göttingen*, 1904, Heft 1.

or on a l'équation

$$\int K(s,t)\,\psi_j(s)\,ds = \frac{1}{\lambda_1}\sum_k \alpha_{jk}\,\psi_k(t);$$

donc

$$(5)\quad \frac{1}{\lambda_1}\sum_k \alpha_{jk}\beta_k = \int\int K(s,t)\,\psi_j(s)\,f(t)\,ds\,dt = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

Ainsi les quantités β satisfont aux p équations linéaires sans seconds membres (5). Mais nous savons (Chap. I, § 3) que le déterminant $\|\alpha_{jk}\|$ de ces équations est égal à l'unité $\left(\text{en omettant le facteur commun } \frac{1}{\lambda_1}\right)$. Donc il faut qu'on ait

$$\beta_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

De même on démontre que

$$\int \psi_j(t)\,f(t)\,dt = 0$$

pour toutes les fonctions fondamentales du noyau, ce qui est contre l'hypothèse exprimant que le système biorthogonal est fermé.

Avec cette définition il n'est possible de démontrer l'inverse de cette proposition que pour certains cas particuliers. M. Hilbert l'a fait pour le cas symétrique; nous y reviendrons dans le § 2.

4. Nous prenons maintenant une définition différente du *noyau fermé*.

Nous supposons que le noyau $K(s,t)$ *et la fonction continue* $f(s)$ *sont telles que les quantités*

$$|K(s,t)|, \quad |f(s)|,$$

$$\frac{1}{|\varepsilon|}|K(s+\varepsilon,t) - K(s,t)|, \quad \frac{1}{|\varepsilon|}|f(s+\varepsilon) - f(s)|,$$

$$\left|\int K(s,t)\,f(t)\,dt\right|$$

ont respectivement les limites supérieures finies

$$1, \quad 1, \quad K, \quad J, \quad i.$$

Le noyau $K(s, t)$ *est fermé par rapport à* t *lorsqu'on a l'inégalité suivante :*

$$(J + K)\, i^{1+\eta} > m > 0, \tag{6}$$

où η, m *sont deux nombres positifs indépendants de* $f(s)$.

Avec cette définition je peux énoncer le théorème suivant :

Lorsque $K(s, t)$ *est un noyau fermé, ou que l'un de ses noyaux réitérés est fermé,* $K(s, t)$ *aura un nombre infini de constantes caractéristiques.*

5. Lemme I. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un noyau n'ait pas de constante caractéristique est la suivante :* N *étant un nombre positif aussi grand qu'on veut, on peut trouver un nombre entier* ν *tel que, lorsque* $n \geqq \nu$, *on a*

$$|K_n(s, t)| \leqq \frac{1}{N^n}.$$

En effet, c'est la condition nécessaire et suffisante pour que la résolvante

$$K(s, t, \lambda) = K(s, t) + \lambda K_2(s, t) + \ldots + \lambda^n K_n(s, t) + \ldots$$

soit une fonction entière de λ.

Lemme II. — *Si la suite de nombres positifs*

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \ldots < \alpha_n \ldots$$

représente la suite des modules des constantes caractéristiques du noyau $K(s, t)$, *la suite*

$$\alpha_1^\nu < \alpha_2^\nu < \alpha_3^\nu \ldots < \alpha_n^\nu \ldots$$

représentera la suite des modules des constantes caractéristiques du noyau réitéré $K_\nu(s, t)$.

Envisageons les deux résolvantes

$$(7)\quad \begin{cases} K(s,t,\lambda) = K(s,t) + \lambda K_2(s,t) \\ \qquad + \lambda^2 K_3(s,t) + \ldots + \lambda^n K_n(s,t) + \ldots, \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} K_\nu(s,t,\lambda) = K_\nu(s,t) + \lambda K_{2\nu}(s,t) \\ \qquad + \lambda^2 K_{3\nu}(s,t) + \ldots + \lambda^n K_{n\nu}(s,t) + \ldots. \end{cases}$$

La condition pour que la fonction (7) ait un pôle dont le module soit plus petit qu'un nombre positif α est la suivante : n_0 étant un nombre entier aussi grand qu'on veut, on peut toujours trouver n tel que

$$|K_n(s,t)| > C\frac{1}{\alpha^n}.$$

La condition pour que $K_\nu(s,t,\lambda)$ ait un pôle dont le module soit plus petit que α^ν est qu'on peut trouver n tel que

$$|K_{n\nu}(s,t)| > C'\frac{1}{\alpha^{n\nu}}.$$

Ces deux conditions sont identiques.

Par conséquent, si $K(s,t)$ a une constante caractéristique dont le module est plus petit que α, $K_\nu(s,t)$ en a une dont le module est plus petit que α^ν.

Soit maintenant $\chi(s,t)$ la partie du noyau $K(s,t)$ relative aux constantes caractéristiques dont les modules sont plus petits que α. $\chi_\nu(s,t)$ sera la partie du noyau $K_\nu(s,t)$ relative aux constantes caractéristiques dont les modules sont plus petits que α^ν.

Nous appliquons maintenant le raisonnement précédent au noyau

$$K'(s,t) = K(s,t) - \chi(s,t)$$

et à sa réitération

$$K'_\nu(s,t) = K_\nu(s,t) - \chi_\nu(s,t),$$

et nous trouvons que, si $K'(s, t)$ a une constante caractéristique plus petite en module que $\beta > \alpha$, le noyau $K'_\nu(s, t)$ en aura une plus petite en module que α^ν.

Ainsi, si $K(s, t)$ a une constante caractéristique λ_1 telle que

$$\alpha \leqq |\lambda_1| < \beta,$$

le noyau réitéré $K_\nu(s, t)$ aura une constante caractéristique λ'_1 telle que

$$\alpha^\nu \leqq |\lambda'_1| < \beta^\nu.$$

Le lemme en résulte immédiatement.

6. En tenant compte du second lemme, il suffit, pour la proposition énoncée plus haut, de considérer le noyau $K(s, t)$ qui est lui-même fermé.

Nous supposons donc que $K(s, t)$ est fermé, et nous désignons par $M_1(t)$, $M_2(t)$, ..., $M_n(t)$, ... les limites supérieures de $|K(s, t)|$, $|K_2(s, t)|$, ..., $|K_n(s, t)|$, ... lorsque s varie, t étant fixe. Je vais démontrer d'abord les inégalités

$$1 \geqq M_1(t) \geqq M_2(t) \geqq \ldots \geqq M_n(t) > 0,$$

où il est supposé que t a une valeur telle que $K(s, t)$ ne soit pas nul identiquement. On a

$$K_n(s, t) = \int K(s, \tau)\, K_{n-1}(\tau, t)\, d\tau.$$

Puisque $|K(s, t)| \leqq 1$ (¹), on a

$$M_n(t) \leqq M_{n-1}(t).$$

En nous rapportant à la définition du noyau fermé, il est clair que nous pouvons prendre pour $f(s)$ la fonction $\frac{K_{n-1}(s, t)}{M_{n-1}(t)}$. Il en résulte que $M_n(t)$ ne peut pas s'évanouir, à moins que $M_{n-1}(t)$ ne s'évanouisse

(¹) *Voir* définition du nº 4.

aussi. L'application successive de ces considérations démontre les inégalités énoncées.

7. Nous prenons maintenant pour $f(s)$ la fonction $\frac{K_n(s,t)}{M_n(t)}$. On a

$$\frac{1}{|\varepsilon|}|f(s+\varepsilon)-f(s)|$$
$$=\frac{1}{|\varepsilon|}\left|\int[K(s+\varepsilon,\tau)-K(s,\tau)]\frac{K_{n-1}(\tau,t)}{M_n(t)}d\tau\right|\leqq K\frac{M_{n-1}(t)}{M_n(t)}.$$

Donc la limite supérieure J de $\frac{1}{|\varepsilon|}|f(s+\varepsilon)-f(\tau)|$ satisfait à l'inégalité

$$J\leqq K\frac{M_{n-1}(t)}{M_n(t)}.$$

La limite supérieure de

$$\left|\int K(s,t)f(t)\,dt\right|=\frac{|K_{n+1}(s,t)|}{M_n(t)}$$

est

$$\frac{M_{n+1}(t)}{M_n(t)}=i.$$

En nous servant de l'inégalité (6), nous avons

$$\left(K+K\frac{M_{n-1}}{M_n}\right)\left(\frac{M_{n+1}}{M_n}\right)^{1+\eta}\geqq(J+K)i^{1+\eta}\geqq m,$$

où nous avons omis l'argument fixe t des fonctions M.

La dernière inégalité nous donne

$$\frac{M_{n+1}}{M_n}\geqq\left(\frac{m}{K}\right)^{\frac{1}{1+\eta}}\left(1+\frac{M_{n-1}}{M_n}\right)^{\frac{-1}{1+\eta}}$$
$$=\left(\frac{m}{K}\right)^{\frac{1}{1+\eta}}\left(\frac{M_n}{M_{n-1}}\right)^{\frac{1}{1+\eta}}\left(\frac{M_n}{M_{n-1}}+1\right)^{\frac{-1}{1+\eta}}\geqq\left(\frac{m}{2K}\right)^{\frac{1}{1+\eta}}\left(\frac{M_n}{M_{n-1}}\right)^{\frac{1}{1+\eta}},$$

puisque $\frac{M_n}{M_{n-1}}\leqq 1$.

Par l'application successive de cette formule, nous avons

$$\frac{M_{n+1}}{M_n}\geqq\left(\frac{m}{2K}\right)^{\frac{1}{1+\eta}+\frac{1}{(1+\eta)^2}+\ldots+\frac{1}{(1+\eta)^{n-1}}}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\frac{1}{(1+\eta)^{n-1}}}.$$

Or faisons

$$0 < c = \frac{M_2}{M_1} \leqq \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\frac{1}{(1+\eta)^{n-1}}} \leqq 1.$$

On peut ensuite supposer que m est choisi de manière que

$$\frac{m}{2K} \leqq 1,$$

pour qu'on ait

$$\left(\frac{m}{2K}\right)^{\frac{1}{1+\eta}+\frac{1}{(1+\eta)^2}+\ldots+\frac{1}{(1+\eta)^n}} \geqq \left(\frac{m}{2K}\right)^{\frac{1}{1+\eta}\frac{1}{1-\frac{1}{1+\eta}}} = \left(\frac{m}{2K}\right)^{\frac{1}{\eta}}.$$

Donc

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} \geqq \left(\frac{m}{2K}\right)^{\frac{1}{\eta}} c$$

et, par conséquent,

$$M_{n+1} \geqq \left[\left(\frac{m}{2K}\right)^{\frac{1}{\eta}} c\right]^n M_1.$$

Or la quantité $\left(\frac{m}{2K}\right)^{\frac{1}{\eta}} c$ est plus grande que zéro.

Donc par le premier lemme il est impossible que $K(s, t)$ n'ait pas de constante caractéristique. C'est-à-dire que $K(s, t)$ a au moins une constante caractéristique.

Pour compléter le théorème, il faut démontrer que, si l'on admet que $K(s, t)$ a un nombre fini de constantes caractéristiques $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$, il faut que $K(s, t)$ en ait aussi une autre $\lambda_{\nu+1}$.

Soit $\chi(s, t)$ la partie de $K(s, t)$ relative à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$.

Écrivons

$$K'(s, t) = K(s, t) - \chi(s, t).$$

Il faut démontrer que $K'(s, t)$ a une constante caractéristique.

Le noyau $K'(s, t)$ n'est pas fermé, mais toute fonction $f(s)$, telle que

$$\int \chi(s, t) f(t)\, dt = 0,$$

satisfait à la relation (6).

Les fonctions

$$\frac{K'_1(s,t)}{M'_1(t)}, \quad \frac{K'_2(s,t)}{M'_2(t)}, \quad \ldots, \quad \frac{K'_n(s,t)}{M'_n(t)},$$

$M'_1(t)$, $M'_2(t)$, ..., $M'_n(t)$, ... étant les limites supérieures de $K'_1(s,t)$, $K'_2(s,t)$, ..., $K'_n(s,t)$, ..., sont des fonctions appartenant à cette catégorie. Donc, en nous servant du procédé déjà employé, nous pouvons démontrer que

$$M'_1(t) \geqq M'_2(t) \geqq \ldots \geqq M'_n(t) \geqq 0$$

[à moins que $M'_1(t) = 0$]. Nous ne pouvons pas écrire $1 \geqq M'_1(t)$.

En prenant pour $f(s)$ maintenant la fonction $\frac{K'_n(s,t)}{M'_n(t)}$, nous pouvons démontrer, comme auparavant, qu'on a

$$M'_{n+1}(t) \geqq \left[c'\left(\frac{m}{2K}\right)^{\frac{1}{\eta}}\right]^n M'_1(t).$$

Il en résulte que $K'(s,t)$ a au moins une constante caractéristique. Le théorème est maintenant établi.

8. Nous remarquons que, si $c'(t)$, $c''(t)$, $c'''(t)$, ..., $c^{(\nu)}(t)$, ... représentent les valeurs de $\frac{M_2(t)}{M_1(t)}$ relatives aux noyaux qu'on obtient en retranchant successivement de $K(s,t)$ les parties relatives à λ_1, λ_2, ..., λ_ν, ..., on a

$$|\lambda_1| \leqq \frac{1}{c'\alpha}, \qquad |\lambda_2| \leqq \frac{1}{c''\alpha}, \qquad \ldots, \qquad |\lambda_\nu| \leqq \frac{1}{c^{(\nu)}\alpha},$$

où $\alpha = \left(\frac{m}{2K}\right)^{\frac{1}{\eta}}$, et où l'on peut toujours prendre la valeur maximum de $c^{(\nu)}(t)$. Puisque λ_ν tend vers l'infini, il faut que $c^{(\nu)}$ tende vers zéro.

§ 2. — Cas symétrique.

9. Le noyau symétrique a été étudié d'une manière très complète

par MM. Hilbert ([1]) et Erhard Schmidt ([2]). Ils ont démontré qu'un tel noyau avait toujours une constante caractéristique et que toutes ses constantes caractéristiques étaient des pôles simples de la résolvante. Le système biorthogonal devient un système orthogonal. M. Hilbert démontre qu'un noyau fermé d'après sa définition a un système orthogonal fermé et par conséquent infini.

Au moyen de la théorie développée dans le Chapitre I, nous pouvons retrouver plusieurs résultats de MM. Hilbert et Schmidt. Nous donnons quelques démonstrations à titre d'exemples.

10. Il est évident d'abord que *toutes les constantes caractéristiques d'un noyau symétrique réel* $K(s, t)$ *sont réelles*. Si

$$\lambda_1 = \lambda' + i\lambda''$$

était une constante caractéristique complexe de $K(s, t)$, et si

$$\varphi_1(s) = \varphi'(s) + i\varphi''(s),$$
$$\psi_1(t) = \psi'(t) + i\psi''(t)$$

étaient une paire de fonctions fondamentales correspondantes, nous aurions aussi la constante conjuguée

$$\lambda_2 = \lambda' - i\lambda''$$

avec sa paire de fonctions

$$\varphi_2(s) = \varphi'(s) - i\varphi''(s),$$
$$\psi_2(t) = \psi'(t) - i\psi''(t).$$

La condition d'orthogonalité est maintenant impossible, car

$$\int \varphi_1(s)\,\psi_2(s)\,ds = \int \{[\varphi'(s)]^2 + [\varphi''(s)]^2\}\,ds > 0.$$

Donc toutes les constantes caractéristiques sont réelles.

([1]) David Hilbert, *Nach. zu Göttingen*, Heft. I, 1904.
([2]) Erhard Schmidt, *Thèse*. Göttingen, 1905.

Les constantes caractéristiques sont des pôles simples de la résolvante. Soit

$$\chi(s, t, \lambda) = \frac{\varphi_1(s, t)}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{\varphi_2(s, t)}{(\lambda_1 - \lambda)^2} + \frac{\varphi_3(s, t)}{(\lambda_1 - \lambda)^3} + \ldots + \frac{\varphi_n(s, t)}{(\lambda_1 - \lambda)^n}$$

la partie de $K(s, t, \lambda)$ relative à λ_1. Je vais démontrer qu'on a identiquement

$$\varphi_2(s, t) = 0.$$

Il en résultera qu'on a également

$$\varphi_3(s, t) = \ldots = \varphi_n(s, t) = 0.$$

La fonction $\varphi_2(s, t)$ aura la forme

$$\varphi_2(s, t) = \sum_1^p a_{ij}\,\varphi_i(s)\,\varphi_j(t)$$

avec les conditions

$$\sum_1^p a_{ii} = 0,$$

$$\sum_1^p a_{ij}\,a_{ji} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or, nous avons par symétrie

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Donc la seconde condition donne

$$\sum_1^p a_{ij}^2 = 0$$

et, par conséquent,

$$a_{ij} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ s = 1, 2, \ldots, p).$$

11. Nous pouvons voir facilement que le noyau fermé au sens de M. Hilbert a un nombre infini de constantes caractéristiques, en nous

servant du fait que tout noyau symétrique a au moins *une* constante caractéristique (¹). En effet, si $K(s,t)$ avait un nombre fini de constantes caractéristiques, on pourrait écrire

$$K(s,t)=\frac{\varphi_1(s)\,\varphi_1(t)}{\lambda_1}+\frac{\varphi_2(s)\,\varphi_2(t)}{\lambda_2}+\ldots+\frac{\varphi_n(s)\,\varphi_n(t)}{\lambda_n}+\varphi_0(s,t),$$

où les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ne sont pas nécessairement distinctes. La fonction $\varphi_0(s,t)$ sera un noyau sans constante caractéristique et, par conséquent, on a identiquement

$$\varphi_0(s,t)=0.$$

Il est évident maintenant que le noyau

$$K(s,t)=\frac{\varphi_1(s)\,\varphi_1(t)}{\lambda_1}+\frac{\varphi_2(s)\,\varphi_2(t)}{\lambda_2}+\ldots+\frac{\varphi_n(s)\,\varphi_n(t)}{\lambda_n}$$

n'est pas fermé. Donc la proposition est démontrée.

Il faut remarquer que nous avons considéré seulement le cas *réel;* lorsqu'un noyau symétrique n'est pas réel, les propositions précédentes ne sont plus exactes.

12. Les noyaux de la forme $K(s,t)\,p(t)$, où $K(s,t)$ est symétrique, ont une très grande importance en Physique mathématique. M. Schmidt démontre qu'on peut les ramener au cas symétrique réel lorsque la fonction $p(t)$ garde toujours le même signe. Si nous écrivons

$$K'(s,t)=K(s,t)\sqrt{p(s)\,p(t)},\qquad \varphi'(s)=\varphi(s)\sqrt{p(s)},$$

l'équation de Fredholm

$$\varphi(s)-\lambda\int K(s,t)\,p(t)\,\varphi(t)\,dt=f(s)$$

devient

$$\varphi'(s)-\lambda\int K'(s,t)\,\varphi'(t)\,dt=f(s)\sqrt{p(s)},$$

(¹) Erhard Schmidt, *loc. cit.* — Adolf Kneser, *Rend. Circ. Matem. Palermo,* juillet 1906.

et nous avons à considérer le noyau $K'(s, t)$ seulement. Lorsque la fonction $p(s)$ change de signe, le noyau $K'(s, t)$ est complexe et la transformation n'est pas utile. Il sera intéressant d'illustrer ces faits par un exemple. Cet exemple démontrera, en particulier, qu'un noyau de la forme $K(s, t)p(t)$ peut avoir une résolvante avec des pôles multiples lorsque $p(t)$ ne garde pas le même signe.

Nous allons prendre le noyau

$$\begin{aligned} K(s, t) = \varphi_1(s)\psi_1(t) + \varphi_2(s)\psi_2(t) \\ + \alpha[\varphi_1(s) - \beta\varphi_2(s)][\beta\psi_1(t) + \psi_2(t)], \end{aligned}$$

dont la résolvante a un pôle double $\lambda_1 = 1$; nous nous demandons si ce noyau peut avoir la forme

$$K'(s, t)p(t),$$

où $K'(s, t)$ est symétrique. Pour cela, il faut que la fonction

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} p(s)K(s, t) = (1+\alpha\beta)\varphi_1(s)p(s)\psi_1(t) \\ + (1-\alpha\beta)\varphi_2(s)p(s)\psi_2(t) \\ + \alpha\varphi_1(s)p(s)\psi_2(t) - \alpha\beta^2\varphi_2(s)p(s)\psi_1(t) \end{aligned} \right.$$

soit symétrique. Il existe donc deux relations comme

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1(s)p(s) = a\psi_1(s) + b\psi_2(s), \\ \varphi_2(s)p(s) = b'\psi_1(s) + c\psi_2(s). \end{aligned} \right.$$

On obtient les valeurs des coefficients a, b, b', c en considérant les propriétés biorthogonales de $\varphi_1(s)$, $\psi_1(t)$, $\varphi_2(s)$, $\psi_2(t)$; on a

$$a = \int [\varphi_1(s)]^2 p(s)\,ds = k_1,$$

$$b = b' = \int \varphi_1(s)\varphi_2(s)p(s)\,ds = k',$$

$$c = \int [\varphi_2(s)]^2 p(s)\,ds = k_2,$$

et nous sommes conduit aux relations

$$(9)\qquad \begin{cases} \psi_1(s) = \frac{1}{J^2}p(s)[k_2\varphi_1(s) - k'\varphi_2(s)], \\ \psi_2(s) = \frac{1}{J^2}p(s)[k'\varphi_1(s) - k_1\varphi_2(s)], \end{cases}$$

où

$$J = +\sqrt{k'^2 - k_1 k^2}.$$

Enfin, pour que (7) soit symétrique, il faut, en substituant (8) dans (7), que les coefficients de $\psi_1(s)\psi_2(t)$ et de $\psi_2(s)\psi_1(t)$ soient égaux.

C'est-à-dire

$$(1 - \alpha\beta)b + \alpha a = (1 + \alpha\beta)b - \alpha\beta^2 c,$$

$$a - 2\beta b + \beta^2 c = 0,$$

$$(10)\qquad k_2\beta^2 - 2k'\beta + k_1 = 0.$$

Donc β doit être une racine d'une équation quadratique si l'on suppose que $\alpha \neq 0$. On a

$$\beta = \frac{1}{k_2}(k' \pm \sqrt{k'^2 - k_1 k_2}) = \frac{1}{k_2}(k' \pm J).$$

Donc il est toujours possible d'avoir une valeur réelle de β, pourvu que

$$k'^2 \geqq k_1 k_2.$$

Mais, dans le cas où $p(t) \geqq 0$, il sera impossible d'avoir une valeur réelle de β; car considérons l'intégrale

$$\int [l\varphi_1(s) + m\varphi_2(s)]^2 p(s)\,ds > 0.$$

On a, quel que soit l, m,

$$l^2 k_1 + 2lmk' + m^2 k_2 > 0.$$

Donc

$$k'^2 < k_1 k_2.$$

§ 3. — Développements en séries de fonctions fondamentales.

13. Nous avons vu que les fonctions fondamentales d'un noyau quelconque formaient un système biorthogonal

$$(11)\qquad \begin{cases} \varphi_1(s), & \varphi_2(s), & \ldots, & \varphi_n(s), & \ldots, \\ \psi_1(t), & \psi_2(t), & \ldots, & \psi_n(t), & \ldots. \end{cases}$$

Il est facile de démontrer que les fonctions de la première ligne d'un système biorthogonal quelconque sont linéairement indépendantes. Admettons qu'il existe pour le système (11) une relation

$$a_1\varphi_1(s) + a_2\varphi_2(s) + \ldots + a_k\varphi_k(s) = 0.$$

Nous multiplions par $\psi_1(s)$ et nous intégrons. Nous aurons ainsi, à cause des relations

$$\begin{aligned} \int \varphi_m(s)\psi_n(s)\,ds &= 1 \qquad \text{si} \qquad m = n, \\ &= 0 \qquad \text{si} \qquad m \neq n, \end{aligned}$$

le résultat

$$a_1 = 0$$

et, de même,

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_k = 0.$$

Donc les fonctions

$$\varphi_1(s), \quad \varphi_2(s), \quad \ldots, \quad \varphi_k(s)$$

sont indépendantes. Les fonctions

$$\psi_1(t), \quad \psi_2(t), \quad \ldots, \quad \psi_k(t)$$

sont également indépendantes.

14. A la fin du premier Chapitre, nous avons indiqué plusieurs développements qui sont valables dans le cas de convergence uniforme. Si nous savons qu'une fonction est développable suivant une

série uniformément convergente de fonctions continues indépendantes

$$\varphi_1(s),\quad \varphi_2(s),\quad \ldots,\quad \varphi_n(s),\quad \ldots,$$

nous pouvons déterminer les coefficients. Soit

$$(12)\qquad f(s) = a_1\varphi_1(s) + a_2\varphi_2(s) + \ldots + a_n\varphi_n(s) + \ldots$$

le développement, et soit

$$\psi_1(t),\quad \psi_2(t),\quad \ldots,\quad \psi_n(t),\quad \ldots$$

une suite de fonctions continues biorthogonales à la suite de φ. On aura

$$a_n = \int f(t)\,\psi_n(s)\,ds.$$

Dans le cas où le système biorthogonal est fermé par rapport à t, c'est-à-dire dans le cas où il n'existe aucune fonction continue $g(s)$ telle que

$$\int g(s)\,\psi_n(s)\,ds = 0$$

pour toute valeur de n, nous voyons facilement que la série (12) représentera une fonction continue *arbitraire* $f(s)$, pourvu qu'elle soit uniformément convergente.

Écrivons

$$\varphi_0(s) = f(s) - \sum_1^\infty a_n\varphi_n(s).$$

Nous avons

$$\int \psi_m(s)\varphi_0(s)ds = \int \psi_m(s) f(s)\,ds - \sum_1^\infty a_n \int \varphi_n(s)\,\psi_m(s)\,ds = a_m - a_m - 0$$

pour toute valeur de m. Donc

$$\varphi_0(s) = 0.$$

Nous ne pouvons pas déterminer dans le cas général si la conver-

gence uniforme a lieu; mais MM. Hilbert ([1]) et Erhard Schmidt ([2]) ont pu approfondir la question dans le cas symétrique.

Ils ont démontré que toute fonction $g(s)$ qui a pour expression

$$g(s) = \int K(s, t)\, h(t)\, dt,$$

$h(t)$ étant une fonction continue, se développe en série absolument et uniformément convergente de fonctions fondamentales de $K(s, t)$. Si $K(s, t)$ est un noyau tel qu'on peut faire tendre vers zéro l'expression

$$\int \left[g(s) - \int K(s, t)\, h(t)\, dt \right]^2 ds = \varepsilon,$$

en choisissant convenablement la fonction continue $h(t)$, où $g(s)$ est une fonction continue quelconque, il sera toujours possible de développer $g(s)$ en série absolument et uniformément convergente de fonctions fondamentales de $K(s, t)$.

M. Poincaré a démontré la convergence uniforme dans beaucoup de cas qui interviennent en Physique mathématique.

15. De ce qui précède, il est évident que la question du développement en série de fonctions fondamentales est étroitement liée avec la question de la solution de l'équation intégrale de première espèce

$$g(s) = \int K(s, t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{13}$$

où $g(s)$ est une fonction connue, et il s'agit de déterminer $\varphi(t)$. M. Bateman ([3]) a démontré un théorème qui est l'inverse de celui de M. Hilbert: *Si $g(s)$ est développable en série absolument et uniformément convergente de fonctions fondamentales de* $K(s, t)$, *l'équation* (13) *aura la solution*

$$\varphi(t) = 2 \int^{\infty} F(t, x)\, dx,$$

([1]) *Loc. cit.*

([2]) *Loc. cit.*

([3]) H. Bateman, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1906.

où $F(t, x)$ *est la fonction entière de* x, *représentée par la série*

$$F(t,x) = x\int K(t,\tau)f(\tau)\,d\tau$$
$$-\frac{x^3}{3!}\int\int\int K(t,\tau_1)\,K(\tau_1,\tau_2)\,K(\tau_2,\tau_3)\,f(\tau_3)\,d\tau_1\,d\tau_2\,d\tau_3$$
$$+\frac{x^5}{5!}\int\int\int\int\int K(t,\tau_1)K(\tau_1,\tau_2)K(\tau_2,\tau_3)K(\tau_3,\tau_4)K(\tau_4,\tau_5)$$
$$\times f(\tau_5)\,d\tau_1\,d\tau_2\,d\tau_3\,d\tau_4\,d\tau_5 - + \ldots.$$

Lorsque le noyau $K(s, t)$ n'est pas symétrique, M. Bateman trouve une solution de l'équation (13) dans le cas où $g(s)$ est développable en série de fonctions fondamentales du noyau symétrique

$$g(s,t) = \int K(s,\tau)\,K(t,\tau)\,d\tau.$$

Mais la méthode de M. Bateman pour le noyau symétrique s'applique directement au noyau asymétrique lorsque les constantes caractéristiques sont réelles et qu'elles sont des pôles simples de la résolvante.

La solution de (13) est unique seulement lorsque $K(s, t)$ est fermé par rapport à t. Dans les autres cas, nous pouvons ajouter à la solution particulière $h_0(s)$, trouvée par la méthode de M. Bateman ou autrement, une fonction continue quelconque $h_1(s)$ qui satisfait à

$$\int K(s,t)\,h_1(t)\,dt = 0.$$

Ainsi nous aurons

$$h(s) = h_0(s) + h_1(s).$$

On peut en donner des exemples :

Soit

$$\varphi_1(s),\quad \varphi_2(s),\quad \ldots,\quad \varphi_n(s),\quad \ldots,$$
$$\psi_1(t),\quad \psi_2(t),\quad \ldots,\quad \psi_n(t),\quad \ldots$$

un système biorthogonal fermé par rapport à t.

Considérons le noyau

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \sum_{j=i_1}^{j=i_p} a_{ij} \varphi_i(s) \psi_j(t),$$

série que nous supposons aussi uniformément convergente.

Soit

$$g(s) = \sum_{i=1}^{i=\infty} b_i \varphi_i(s),$$

série que nous supposons aussi uniformément convergente.

Dans l'équation

$$g(s) = \int K(s, t) \varphi(t) \, dt,$$

nous égalons les coefficients de $\varphi_i(s)$ dans les deux membres

$$(14) \qquad b_i = \sum_{j=i_1}^{j=i_p} a_{ij} \int \psi_j(t) \varphi(t) \, dt.$$

Supposons qu'une solution continue $\varphi(t)$ existe; mettons

$$\varphi(t) = \alpha_i \varphi_i(t) + \alpha_{i_2} \varphi_{i_2}(t) + \ldots + \alpha_{i_p} \varphi_{i_p}(t) + \varphi_i'(t),$$

où $\varphi_i'(t)$ est orthogonale à $\psi_{i_1}(t)$, $\psi_{i_2}(t)$, ..., $\psi_{i_p}(t)$; c'est-à-dire qu'on a

$$\alpha_{i_1} = \int \varphi(t) \psi_{i_1}(t) \, dt,$$

$$\alpha_{i_2} = \int \varphi(t) \psi_{i_2}(t) \, dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\alpha_{i_p} = \int \varphi(t) \psi_{i_p}(t) \, dt.$$

Donc, en écrivant l'équation (14) pour $i = i_1, i_2, \ldots, i_p$, nous aurons les équations

$$b_{i_1} = a_{i_1 i_1} \alpha_{i_1} + a_{i_1 i_2} \alpha_{i_2} + \ldots + a_{i\; i_p} \alpha_{i_p},$$

$$b_{i_2} = a_{i_2 i_1} \alpha_{i_1} + a_{i_2 i_2} \alpha_{i_2} + \ldots + a_{i_2 i_p} \alpha_{i_p},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$b_{i_p} = a_{i_p i_1} \alpha_{i_1} + a_{i_p i_2} \alpha_{i_2} + \ldots + a_{i_p i_p} \alpha_{i_p}.$$

Or, nous savons que le déterminant (Chap. I, § 3)

$$\| a_{i_p i_p} \| = \frac{1}{\lambda_i}.$$

Par conséquent, les coefficients $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_p}$ sont déterminés. Nous pouvons déterminer les autres coefficients analogues

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n, \quad \ldots,$$

et nous aurons

$$\varphi(t) = \alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t) + \ldots + \alpha_n \varphi_n(t) + \ldots + \varphi'(t),$$

où $\varphi'(t)$ est orthogonale à $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t), \ldots$, et, par conséquent,

$$\varphi'(t) = 0,$$

pourvu que cette série soit uniformément convergente. Nous aurons déterminé une solution de l'équation (13), et cette solution sera unique.

16. Dans le cas où les constantes caractéristiques de $K(s, t)$ sont des pôles simples de la résolvante, nous pourrons écrire

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(s) \psi_i(t),$$

et la solution sera

$$\varphi(t) = b_1 \lambda_1 \varphi_1(t) + b_2 \lambda_2 \varphi_2(t) + \ldots + b_n \lambda_n \varphi_n(t) + \ldots.$$

Prenons maintenant le noyau

$$K(s, t) = a \varphi_1(s) \psi_1(t) + b \varphi_2(s) \psi_2(t) + c \varphi_3(s) \psi_3(t),$$

dont les fonctions fondamentales sont

$$\begin{array}{ll} \varphi_1(s), & \varphi_2(s), \\ \psi_1(t), & \psi_2(t). \end{array}$$

Il y aura une solution de (13) pourvu que $g(s)$ ait la forme

$$g(s)=a'\varphi_1(s)+b'\varphi_2(s)+c'\varphi_3(s),$$

et dans ce cas seulement. La solution sera

$$\varphi(s)=\frac{a'}{a}\varphi_1(s)+\frac{b'}{b}\varphi_2(s)+\frac{c'}{c}\varphi_4(s).$$

Elle ne sera pas unique, puisque nous pouvons ajouter à cette expression une fonction linéaire quelconque de

$$\varphi_3(s),\quad \varphi_5(s),\quad \ldots,\quad \varphi_n(s),\quad \ldots,$$

qui sont les solutions de

$$\int K(s,t)\varphi(t)\,dt=0.$$

17. Remarquons enfin que l'équation intégrale de première espèce

$$\int K(s,t)\varphi(t)\,dt=g(s)$$

peut être regardée comme le cas limite de l'équation de Fredholm

$$\varphi(s)+\lambda\int K(s,t)\varphi(t)\,dt=\lambda g(s),$$

lorsque λ tend vers l'infini. Si la solution de la dernière équation tend vers une fonction intégrable lorsque λ tend vers l'infini d'une manière convenable, la limite de $\varphi(s)$ sera une solution de la première équation. Les solutions de l'équation

$$\int K(s,t)\varphi(t)\,dt=0$$

seront les solutions fondamentales relatives à $\lambda=\infty$.

Sur les invariants intégraux;

Par M. E. GOURSAT.

La théorie générale des invariants intégraux a été développée par M. Poincaré dans le Tome III de son Ouvrage sur les *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*. Le but de ce Mémoire est d'apporter une contribution à l'étude de la question générale suivante : Connaissant un invariant intégral, absolu ou relatif, d'un ordre quelconque, d'un système d'équations différentielles, quel parti peut-on en tirer pour l'intégration de ce système? Je montre que de tout invariant intégral on peut déduire au moins un système d'équations différentielles dont toutes les intégrales appartiennent au système proposé, et dont l'intégration est en général un problème plus simple. Dans le cas où les deux systèmes sont équivalents, on peut déterminer un multiplicateur ([1]).

I.

1. Je rappellerai d'abord les principaux résultats de la théorie des intégrales multiples qui seront utilisés dans ce travail, ainsi que la signification précise des notations employées ([2]).

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un système de n variables indépendantes, et un système de fonctions de ces n variables

$$A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} \qquad (p \leqq n),$$

([1]) Les principaux résultats de ce Mémoire ont été résumés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, 3 juin 1907).

([2]) Outre l'Ouvrage cité de M. Poincaré, on pourra consulter les Mémoires suivants du même auteur : *Sur les résidus des intégrales doubles* (*Acta mathematica*, t. IX); *Analysis situs* (*Journal de l'École Polytechnique*, 1895); Complément à l'*Analysis situs* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*). On trouvera aussi des renseignements bibliographiques sur les invariants dans deux Mémoires de M. de Donder (*Rendiconti*, 1901 et 1902).

dont chacune est affectée de p indices différents $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, pris parmi les n premiers nombres. A chaque arrangement des n premiers nombres p à p correspond ainsi une fonction déterminée des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Les fonctions dont quelques indices diffèrent sont complètement indépendantes, mais toutes les fonctions dont les indices ne diffèrent que par leur ordre *sont égales au signe près*. Ainsi, soit $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_p)$ une nouvelle permutation des indices $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$; on a

$$(1) \qquad A_{\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_p} = A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p},$$

si les deux permutations $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ et $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_p)$ sont de la même classe, et

$$(2) \qquad A_{\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_p} = - A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p},$$

si les deux permutations sont de classes différentes. Lorsque deux indices sont égaux, la fonction est nécessairement nulle.

Nous observerons en passant que les deux permutations

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \qquad \text{et} \qquad (\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_p, \alpha_1)$$

sont de même classe si p est impair et de classes différentes si p est pair. En effet, dans les deux cas, on passe de la première permutation à la seconde par $p-1$ échanges entre deux éléments consécutifs.

Supposons les n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ exprimées au moyen de p variables indépendantes $u_1, u_2, \ldots, u_p$, et considérons l'intégrale multiple d'ordre p

$$(\mathrm{I}) \qquad I_p = \int\int\cdots\int \sum A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1}\frac{\partial x_{\alpha_2}}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial u_p} du_1\ldots du_p$$

étendue à un certain domaine (e_p) de l'espace $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$, la sommation indiquée par le signe Σ s'étendant à tous les arrangements des n premiers nombres p à p. Cette intégrale multiple peut encore s'écrire, d'après les formules (1) et (2),

$$(\mathrm{II}) \qquad I_p = \int\int\cdots\int \sum A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} \frac{D(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_p})}{D(u_1, u_2, \ldots, u_p)} du_1\, du_2\ldots du_p,$$

le signe Σ étant étendu, dans cette nouvelle formule, à toutes les *com-*

binaisons des n premiers nombres p à p. Dans chaque combinaison, on peut prendre les indices dans un ordre arbitraire, mais il faut avoir soin de prendre, dans chaque déterminant fonctionnel, les variables x_i dans l'ordre qui est indiqué par l'ordre des indices du coefficient correspondant.

Lorsque le point de coordonnées $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ décrit dans l'espace à p dimensions le domaine (e_p), le point de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ décrit dans l'espace à n dimensions un *continuum* (E_p) à p dimensions; la forme (II) de l'intégrale I_p, rapprochée de la formule du changement de variables dans une intégrale multiple, montre immédiatement que la valeur de I_p ne dépend pas du choix des variables auxiliaires $u_1, u_2, \ldots, u_p$, mais seulement du domaine (E_p). Il faut remarquer cependant que, lorsqu'on échange quelques-unes de ces variables, l'intégrale peut changer de signe ; ce fait est analogue à ce qui se présente pour une intégrale de surface dans l'espace à trois dimensions, où le signe de l'intégrale change en même temps que le côté de la surface suivant lequel on prend l'intégrale.

Nous écrirons le plus souvent l'intégrale multiple I_p sous la forme abrégée

$$\text{(III)} \qquad I_p = \int\int\cdots\int \sum A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}\, dx_{\alpha_1}\, dx_{\alpha_2}\ldots dx_{\alpha_p},$$

le signe Σ étant étendu à toutes les combinaisons p à p des n premiers nombres. Mais, pour avoir la signification précise de ce symbole, il faut toujours se reporter aux expressions (I) ou (II).

Remarque. — L'ordre dans lequel on écrit les différentielles dans les produits tels que $dx_{\alpha_1}dx_{\alpha_2}\ldots dx_{\alpha_p}$ n'est pas indifférent, on le voit. Par exemple, s'il s'agit d'une intégrale de surface, les symboles

$$\int\int A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy,$$

$$\int\int A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dy\,dx,$$

$$\int\int A\,dy\,dz + B\,dx\,dz + C\,dx\,dy$$

n'ont pas du tout la même signification. La notation (I) a l'avantage

de supprimer toute espèce d'ambiguïté. Une intégrale de surface s'écrira avec cette notation

$$I_2 = \int\int \left[A_{12} \frac{D(x_1, x_2)}{D(u, v)} + A_{23} \frac{D(x_2, x_3)}{D(u, v)} + A_{31} \frac{D(x_3, x_1)}{D(u, v)} \right] du\, dv,$$

x_1, x_2, x_3 étant supposées exprimées au moyen des deux variables auxiliaires u et v.

2. On trouvera dans le Mémoire cité de M. Poincaré (*Acta mathematica*) les démonstrations des théorèmes suivants; les fonctions qu'on considère sont supposées uniformes et continues, tout au moins dans les domaines d'intégration.

Toute intégrale I_p *étendue à une multiplicité* fermée (E_p) *de l'espace à* n *dimensions* $(p < n)$ *peut être remplacée par une intégrale* I_{p+1} *étendue à une multiplicité* (E_{p+1}) *de l'espace à* n *dimensions, limitée par la première multiplicité à* p *dimensions,*

$$\text{(IV)} \qquad I_{p+1} = \int\int\cdots\int \sum \mathcal{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p \alpha_{p+1}} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_{p+1}},$$

le signe Σ *étant étendu à toutes les combinaisons des* n *premiers nombres* $p+1$ à $p+1$.

L'expression du coefficient

$$\mathcal{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p+1}}$$

a deux expressions différentes suivant la parité de p.

Si p est pair, on a

$$(3) \qquad \mathcal{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p+1}} = \frac{\partial A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}}{\partial x_{\alpha_{p+1}}} + \frac{\partial A_{\alpha_2 \ldots \alpha_p \alpha_{p+1}}}{dx_{\alpha_1}} + \ldots + \frac{\partial A_{\alpha_{p+1} \alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}}$$

avec des signes $+$ seulement dans le second membre; si p est impair, on a

$$(4) \qquad \mathcal{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p+1}} = \frac{\partial A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}}{\partial x_{\alpha_{p+1}}} - \frac{\partial A_{\alpha_2 \ldots \alpha_p \alpha_{p+1}}}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots - \frac{\partial A_{\alpha_{p+1} \alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}}$$

avec le signe $+$ et le signe $-$ alternativement.

Ces formules fournissent la réponse à la question suivante :

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale I_p, étendue à une multiplicité à p dimensions, ne dépende que de la multiplicité à p — 1 dimensions qui limite ce domaine?

Il faut et il suffit, pour cela, que l'intégrale I_p, étendue à une multiplicité *fermée* quelconque à p dimensions, soit nulle, ou que l'intégrale qui lui est égale I_{p+1}, étendue à une multiplicité quelconque à $p+1$ dimensions, soit nulle, c'est-à-dire qu'on ait, pour toutes les combinaisons d'indices,

$$\mathcal{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p+1}} = 0.$$

Nous dirons alors, pour abréger, que l'expression

$$(5) \qquad \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p}$$

est une *différentielle totale exacte,* et nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Pour que l'expression (5) *soit une différentielle exacte, il faut et il suffit qu'on ait, pour toutes les combinaisons d'indices,*

$$(6) \qquad \frac{\partial A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}}{\partial x_{\alpha_{p+1}}} + \frac{\partial A_{\alpha_2 \ldots \alpha_p \alpha_{p+1}}}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots + \frac{\partial A_{\alpha_{p+1} \alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}} = 0,$$

si p est pair, et

$$(6)' \qquad \frac{\partial A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}}{\partial x_{\alpha_{p+1}}} - \frac{\partial A_{\alpha_2 \ldots \alpha_p \alpha_{p+1}}}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots - \frac{\partial A_{\alpha_{p+1} \alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}} = 0,$$

si p est impair. Le nombre total de ces conditions est égal au nombre des combinaisons de n objets $p+1$ *à* $p+1$.

Si l'expression (5) n'est pas une différentielle totale exacte, l'expression analogue

$$(7) \qquad \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p+1}} \mathcal{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p+1}} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_{p+1}},$$

où les coefficients $\mathcal{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p+1}}$ sont donnés par les formules (3) ou (4), est une différentielle totale exacte. On déduit, en effet, très aisément de ces expressions des coefficients que les relations analogues à (6) et à (6)' sont identiquement vérifiées.

Il suit, de là, que toute intégrale multiple I_p d'ordre p, étendue à une multiplicité fermée (E_p), peut être remplacée par une intégrale de différentielle totale exacte I_{p+1}, étendue à une multiplicité (E_{p+1}), limitée par la multiplicité (E_p) (théorème de Stokes généralisé).

Inversement, si l'expression (5) est une différentielle totale exacte, l'intégrale I_p étendue à une multiplicité non fermée (E'_p) peut être remplacée par une intégrale I_{p-1} étendue à la multiplicité fermée (E_{p-1}) qui limite (E'_p). Il suffit pour cela de montrer qu'on peut former une intégrale I_{p-1},

$$I_{p-1} = \int\int\int\cdots\int \sum_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}} C_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}}\, dx_{\alpha_1}\, dx_{\alpha_2}\ldots dx_{\alpha_{p-1}},$$

telle que I_p se déduise de I_{p-1} de la même façon que nous avons déduit I_{p+1} de I_p. On a ainsi un certain nombre d'équations aux dérivées partielles pour déterminer les coefficients $C_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}}$, et ces expressions sont compatibles, pourvu que les relations (6) ou (6)' soient satisfaites.

3. Appliquons ces généralités aux cas les plus simples.

Si $p=1$, on a l'intégrale simple analogue aux intégrales curvilignes,

$$(8)\qquad I_1 = \int A_1\, dx_1 + A_2\, dx_2 + \ldots + A_n\, dx_n;$$

cette intégrale I_1, étendue à une ligne fermée L, est égale à l'intégrale double

$$(9)\qquad I_2 = \int\int \sum_{i,k} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i}\right) dx_i\, dx_k,$$

étendue à une multiplicité à deux dimensions limitée par la ligne L. Pour que I_1 soit une intégrale de différentielle exacte, il faut et il suffit que l'intégrale I_2 soit identiquement nulle, ce qui donne les conditions bien connues

$$(10)\qquad \frac{\partial A_i}{\partial x_k} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Soit maintenant I_2 une intégrale double quelconque,

$$(11) \qquad I_2 = \int\int \sum_{i,k} A_{i,k}\, dx_i\, dx_k;$$

cette intégrale double I_2, étendue à une multiplicité fermée (E_2), est égale à une intégrale triple I_3, étendue à une multiplicité à trois dimensions (E_3), limitée par (E_2),

$$(12) \qquad I_3 = \int\int\int \sum_{i,k,l} \left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial A_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{li}}{\partial x_k} \right) dx_i\, dx_k\, dx_l.$$

Pour que I_2 soit une intégrale de différentielle exacte, il faut qu'on ait, quels que soient les indices i, k, l,

$$(13) \qquad \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial A_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{li}}{\partial x_k} = 0 \qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Si ces conditions sont satisfaites, on peut identifier les expressions (9) et (11); autrement dit, on peut déterminer n fonctions A_1, A_2, ..., A_n, satisfaisant aux relations

$$(14) \qquad \frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i} = A_{i,k} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

4. Rappelons encore la définition des invariants intégraux.

Soit

$$(15) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt$$

un système d'équations différentielles; nous supposerons que les fonctions X_i sont uniformes et continues, ainsi que leurs dérivées, et ne renferment pas t, et nous appellerons, pour abréger, *caractéristique* toute multiplicité à une dimension Γ_1, représentée par les équations

$$x_1 = f_1(t), \qquad x_2 = f_2(t), \qquad \ldots, \qquad x_n = f_n(t),$$

$f_1(t)$, ..., $f_n(t)$ formant un système de solutions des équations (15). De chaque point $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ de l'espace à n dimensions part une caractéristique Γ qui est décrite par le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ lorsque t varie.

La valeur initiale de t étant supposée nulle, considérons dans l'espace à n dimensions une multiplicité quelconque à p dimensions (E_p^0); de chaque point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ de cette multiplicité part une caractéristique et, au bout du temps t, le point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ est venu au point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Le lieu de ces différents points est une autre multiplicité à p dimensions (E_p). Si l'intégrale multiple

$$(16) \qquad I_p = \int\int\cdots\int\sum A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}\,dx_{\alpha_1}\,dx_{\alpha_2}\ldots dx_{\alpha_p}$$

a la même valeur pour les deux multiplicités (E_p^0) et (E_p), quel que soit t, on dit que I_p est un *invariant intégral* ABSOLU *d'ordre p* du système (15).

Il peut se faire que cette propriété d'invariance n'ait lieu que pour les multiplicités *fermées;* on dit alors qu'on a un *invariant intégral* RELATIF *d'ordre p*, et on le désigne par la lettre J_p.

En ce qui concerne les invariants absolus, nous ferons encore la distinction suivante : un invariant absolu peut être une intégrale de différentielle totale exacte; dans ce cas, nous le représenterons par I_p^d. Il n'y a pas lieu de faire cette distinction pour les invariants relatifs, puisque l'intégrale d'une différentielle totale exacte, étendue à une multiplicité fermée, est toujours nulle.

D'après ce qui précède, un invariant intégral J_p ou I_p donne immédiatement un invariant intégral I_{p+1}^d; inversement, un invariant intégral I_p^d est équivalent à un invariant intégral relatif J_{p-1}.

5. Nous allons chercher, d'une manière générale, à quelles conditions doivent satisfaire les coefficients $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$ pour que I_p soit un invariant absolu. Il suffit, pour cela, de considérer I_p comme une fonction de t et d'écrire que sa dérivée est nulle :

$$\frac{dI_p}{dt} = 0.$$

Pour obtenir $\frac{dI_p}{dt}$, supposons qu'on donne à t un accroissement δt et calculons le coefficient de δt dans la différence $I_p(t+\delta t) - I_p(t)$.

Soient $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ les coordonnées d'un point quelconque de la multiplicité (E_p) au temps t, et $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ les coordonnées du

point correspondant de la multiplicité au temps $t+\delta t$. On a

$$x'_i = x_i + \delta t X_i + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les termes non écrits étant infiniment petits du second ordre en δt. Nous écrirons les deux intégrales $I_p(t)$ et $I_p(t+\delta t)$ sous la forme explicite (I) :

$$I_p(t) = \int\int\cdots\int \sum A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial u_p} du_1\, du_2 \ldots du_p,$$

$$I_p(t+\delta t) = \int\int\cdots\int \sum A'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} \frac{\partial x'_{\alpha_1}}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial x'_{\alpha_p}}{\partial u_p} du_1\, du_2 \ldots du_p;$$

$A'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$ désigne ce que devient $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$ quand on y remplace x_i par x'_i; et les deux intégrales sont étendues au même domaine pour les variables auxiliaires $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

Soit $A'_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p} \frac{\partial x'_{\beta_1}}{\partial u_1} \frac{\partial x'_{\beta_2}}{\partial u_2} \cdots \frac{\partial x'_{\beta_p}}{\partial u_p}$ un terme quelconque de la seconde intégrale; on a

$$A'_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p} = A_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p} + \delta t\, X(A_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p}) + \ldots,$$

$$\frac{\partial x'_{\beta_1}}{\partial u_1} = \frac{\partial x_{\beta_1}}{\partial u_1} + \delta t \sum_h \frac{\partial X_{\beta_1}}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial u_1} + \ldots,$$

$$\frac{\partial x'_{\beta_2}}{\partial u_2} = \frac{\partial x_{\beta_2}}{\partial u_2} + \delta t \sum_h \frac{\partial X_{\beta_2}}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial u_2} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial x'_{\beta_p}}{\partial u_p} = \frac{\partial x_{\beta_p}}{\partial u_p} + \delta t \sum_h \frac{\partial X_{\beta_p}}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial u_p} + \ldots.$$

Cherchons le coefficient de $\delta t \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \frac{\partial x_{\alpha_2}}{\partial u_2} \cdots \frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial u_p}$ dans la nouvelle intégrale. Pour que le produit

$$A'_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p} \frac{\partial x'_{\beta_1}}{\partial u_1} \frac{\partial x'_{\beta_2}}{\partial u_2} \cdots \frac{\partial x'_{\beta_p}}{\partial u_p}$$

donne un terme de cette espèce, deux hypothèses sont possibles et deux seulement :

1° On peut avoir

$$\beta_1 = \alpha_1, \qquad \beta_2 = \alpha_2, \qquad \ldots, \qquad \beta_p = \alpha_p,$$

ce qui donne le terme

$$\delta t \, X(A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}) \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \frac{\partial x_{\alpha_2}}{\partial u_2} \cdots \frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial u_p},$$

où l'on a posé

$$X(f) = X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

2° On obtient encore un produit de la forme voulue en supposant que les p égalités $\beta_i = \alpha_i$ sont vérifiées sauf une seule. Si, par exemple, on a

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \ldots, \quad \beta_{i-1} = \alpha_{i-1}, \quad \beta_{i+1} = \alpha_{i+1}, \quad \ldots, \quad \beta_p = \alpha_p,$$

β_i étant quelconque, on a le produit

$$\delta t \, A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} \beta_i \alpha_{i+1} \ldots \alpha_p} \frac{\partial X_{\beta_i}}{\partial x_{\alpha_i}} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \frac{\partial x_{\alpha_2}}{\partial u_2} \cdots \frac{\partial x_p}{\partial u_p},$$

et la somme des termes ainsi obtenus en faisant varier β_i peut s'écrire

$$\delta t \sum_h A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{i-1} h \alpha_{i+1} \ldots \alpha_p} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_i}} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial u_p}.$$

Comme l'indice variable β_i peut remplacer l'un quelconque des indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, on voit qu'en définitive le coefficient de $\delta t \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial u_p}$ dans la seconde intégrale a pour expression

$$(17) \quad B_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} = X(A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}) + \sum_h \left(A_{h \alpha_2 \ldots \alpha_p} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_1}} + A_{\alpha_1 h \ldots \alpha_p} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_2}} + \ldots + A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1} h} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_p}} \right)$$

et la dérivée $\frac{dI_p}{dt}$ est représentée par une intégrale multiple de même forme que I_p :

$$(18) \quad \frac{dI_p}{dt} = \int \int \cdots \int \sum B_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \frac{\partial x_{\alpha_2}}{\partial u_2} \cdots \frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial u_p} du_1 \, du_2 \ldots du_p,$$

cette intégrale étant étendue au même domaine que la première.

Pour que I_p soit un invariant intégral absolu, il faudra que $\frac{dI_p}{dt}$ soit nul, quel que soit le domaine d'intégration, c'est-à-dire que tous les coefficients $B_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}$ soient nuls séparément. Donc, *pour que* I_p *soit*

un invariant intégral absolu, il faut et il suffit qu'on ait, pour toutes les combinaisons d'indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$,

$$(19)\quad X(A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}) + \sum_h \left(A_{h\alpha_2\ldots\alpha_p}\frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_1}} + A_{\alpha_1 h\ldots\alpha_p}\frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_2}} + \ldots + A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}h}\frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_p}} \right) = 0.$$

Pour que $I_p(t)$ soit un invariant intégral *relatif*, il suffira que l'intégrale multiple (18), qui exprime $\frac{dI_p}{dt}$, étendue à une multiplicité fermée quelconque, soit nulle, c'est-à-dire que l'expression

$$\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_p} B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} dx_{\alpha_1}\ldots dx_{\alpha_p}$$

soit une différentielle totale exacte. On obtiendra les mêmes conditions en exprimant que l'intégrale multiple I^d_{p+1} d'ordre $p+1$, qu'on déduit de I_p ainsi qu'il a été expliqué plus haut, est un invariant intégral *absolu* d'ordre $p+1$, ce qui fournit les équations de même forme que les équations (19)

$$(20)\quad X(\mathcal{A}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p\alpha_{p+1}}) + \sum_h \left(\mathcal{A}_{h\alpha_2\ldots\alpha_{p+1}}\frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_1}} + \mathcal{A}_{\alpha_1 h\alpha_3\ldots\alpha_{p+1}}\frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_2}} + \ldots + \mathcal{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_p h}\frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_{p+1}}} \right) = 0,$$

les $\mathcal{A}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p+1}}$ étant données par les équations (3) ou (4) suivant la parité de p.

II.

6. M. Poincaré a aussi indiqué (*Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. III, p. 33) un procédé permettant de déduire dans certains cas d'un invariant absolu I_p un invariant absolu d'ordre inférieur I_{p-1}.

Soit

$$I_p = \int\int\cdots\int A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} dx_{\alpha_1}\ldots dx_{\alpha_p}$$

un invariant absolu d'ordre p du système (15); *si l'on pose*

$$(21)\quad C_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}} = \sum_{i=1}^{n} A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}i} X_i,$$

on a un nouvel invariant intégral d'ordre $p-1$:

$$(22)\qquad I_{p-1} = \int\int\cdots\int\sum C_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}}\, dx_{\alpha_1}\, dx_{\alpha_2}\ldots dx_{\alpha_{p-1}}.$$

Telle est, sous sa forme générale, la proposition que M. Poincaré a déduite de la liaison qui existe entre les invariants intégraux et les équations aux variations. Il est facile de la vérifier au moyen des conditions (19). Il suffit, en effet, de montrer que les relations

$$(23)\quad X(C_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}}) + \sum_{h=1}^{n}\left(C_{h\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}}\frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots + C_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-2}h}\frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_{p-1}}}\right) = 0$$

sont les conséquences des équations (19). Or, on a

$$X(C_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}}) = \sum_i X_i X(A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}i}) + \sum_i\sum_h A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}i} X_h \frac{\partial X_i}{\partial x_h}.$$

Remplaçons $X(A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}i})$ par sa valeur tirée des formules (19); il vient

$$\begin{aligned} X(C_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}}) = {} & \sum_i\sum_h A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}i} X_h \frac{\partial X_i}{\partial x_h} \\ & - \sum_i X_i \sum_h \left(A_{h\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}i}\frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots \right. \\ & \left. + A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-2}hi}\frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_{p-1}}} + A_{\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}h}\frac{\partial X_h}{\partial x_i}\right). \end{aligned}$$

En remplaçant de même les C par leurs valeurs, la relation à vérifier (22) devient

$$\begin{aligned} & \sum_i\sum_h A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}i} X_h \frac{\partial X_i}{\partial x_h} \\ & - \sum_i X_i \sum_h \left(A_{h\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}i}\frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots + A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}h}\frac{\partial X_h}{\partial x_i}\right) \\ & + \sum_h \left(\frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_1}}\sum_i A_{h\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}i}X_i + \ldots + \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_{p-1}}}\sum_i A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-2}hi}X_i\right) = 0, \end{aligned}$$

ou, en supprimant les termes qui se détruisent immédiatement,

$$\sum_i\sum_h A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}i} X_h \frac{\partial X_i}{\partial x_h} = \sum_i\sum_h A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}h} X_i \frac{\partial X_h}{\partial x_i};$$

il suffit de permuter les indices i et h pour apercevoir l'identité des deux membres.

7. Pour énoncer plus facilement les résultats qui vont suivre, j'expliquerai d'abord un certain nombre d'expressions et de notations qui seront employées. J'appellerai l'opération par laquelle on passe d'un invariant absolu I_p ou d'un invariant relatif J_p à un invariant absolu I_{p+1}^d (§ 4) l'opération (D). Cette opération, appliquée à un invariant I_p^d, conduit à un invariant identiquement nul, comme on l'a déjà fait observer. L'opération définie au paragraphe précédent, par laquelle on déduit d'un invariant absolu I_p un invariant absolu I_{p-1} d'ordre inférieur, sera appelée pour abréger l'opération (E). Cette opération conduit à un invariant identiquement nul, si l'invariant I_p auquel on l'applique satisfait aux relations

$$\sum_{i=1}^{n} A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} i} X_i = 0, \tag{24}$$

quels que soient les $p-1$ indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}$. Nous dirons alors que l'invariant I_p est *exceptionnel*, et nous le représenterons par la notation I_p^e. *Appliquée à un invariant non exceptionnel, l'opération* (E) *conduit à un invariant exceptionnel* I_{p-1}^e. Nous avons, en effet,

$$\sum_{h=1}^{n} C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-2} h} X_h = \sum_h \sum_i A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-2} h i} X_i X_h,$$

et le coefficient de $X_i X_h$ dans le second membre est

$$\sum_{i,h} A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-2} h i} + \sum_{i,h} A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-2} i h} = 0.$$

Cette propriété rapproche l'opération (E) de l'opération (D), et en définitive nous sommes conduits à considérer quatre espèces d'invariants absolus :

1° Les invariants qui ne sont ni I_p^d ni I_p^e ; nous les représenterons par la notation I_p^0, quand il y aura lieu de mettre cette propriété en évidence;

2° Les invariants I_p^d, pour lesquels l'expression sous le signe intégral est une différentielle totale exacte;

3° Les invariants exceptionnels qu'on vient de définir I_p^e ;

4° Un invariant I_p peut être à la fois I_p^d et I_p^e; nous le représenterons alors par $I_p^{(d,e)}$.

Les résultats acquis jusqu'ici peuvent se résumer ainsi :

1° *L'opération* (D) *appliquée à un invariant* I_p^0 *ou* I_p^e *conduit à un invariant* I_p^d *ou* $I_p^{(d,e)}$; *appliquée à un invariant* I_p^d *ou* $I_p^{(d,e)}$, *elle conduit à un invariant identiquement nul.*

2° *L'opération* (E) *appliquée à un invariant* I_p^0 *ou* I_p^d *conduit à un invariant* I_p^e *ou* $I_p^{d,e}$; *appliquée à un invariant* I_p^e *ou* $I_p^{(d,e)}$, *elle conduit à un invariant identiquement nul.*

Ces deux opérations se rapprochent donc par cette propriété commune; si l'on applique l'une d'elles deux fois de suite, on aboutit toujours à un invariant identiquement nul.

8. Nous allons compléter les énoncés précédents.

A. *L'opération* (E) *appliquée à un invariant* I_p^d *conduit à un invariant* $I_{p-1}^{(d,e)}$.

Il suffit de démontrer que, si les fonctions $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$ vérifient les relations (19) et les relations (6) ou (6)', les fonctions $C_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}}$ définies par les formules (21) satisfont aux relations analogues aux relations (6) ou (6)'.

Supposons, pour fixer les idées, que p soit *impair;* $p-1$ est pair, et il faut prouver que l'équation

$$(25)\qquad \frac{\partial C_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}}+\frac{\partial C_{\alpha_2\ldots\alpha_p}}{\partial x_{\alpha_1}}+\frac{\partial C_{\alpha_3\ldots\alpha_p\alpha_1}}{\partial x_{\alpha_2}}+\ldots+\frac{\partial C_{\alpha_p\alpha_1\ldots\alpha_{p-2}}}{\partial x_{\alpha_{p-1}}}=0$$

est une conséquence des équations (6)' et (19).

Remplaçons les C par leurs valeurs; la relation à vérifier devient

$$\sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_p}} A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}i}+\sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_1}} A_{\alpha_2\ldots\alpha_p i}+\ldots+\sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_{p-1}}} A_{\alpha_p\alpha_2\ldots\alpha_{p-2}i}$$
$$+\sum_i X_i\left(\frac{\partial A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}i}}{\partial x_{\alpha_p}}+\frac{\partial A_{\alpha_2\ldots\alpha_p i}}{\partial x_{\alpha_1}}+\ldots+\frac{\partial A_{\alpha_p\alpha_1\ldots\alpha_{p-2}i}}{\partial x_{\alpha_{p-1}}}\right)=0.$$

Mais, p étant impair, une permutation circulaire de p indices équi-

vaut à un nombre pair de dérangements, et la relation peut encore s'écrire

$$\sum_i \left(A_{i\alpha_2\ldots\alpha_p} \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_1}} + A_{\alpha_1 i \alpha_3 \ldots \alpha_p} \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_2}} + \ldots + A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1} i} \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_p}} \right)$$
$$+ \sum_i X_i \left(\frac{\partial A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1} i}}{\partial x_{\alpha_p}} - \frac{\partial A_{\alpha_2\ldots\alpha_{p-1} i \alpha_p}}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots + \frac{\partial A_{i\alpha_p\alpha_1\ldots\alpha_{p-2}}}{\partial x_{\alpha_{p-1}}} \right) = 0,$$

ou, en tenant compte de la relation (6)',

$$X(A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}) + \sum_i \left(A_{i\alpha_2\ldots\alpha_p} \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots + A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1} i} \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_p}} \right) = 0.$$

On retombe précisément sur les équations (19).

On aurait des calculs analogues pour le cas où p est pair ([1]).

B. *L'opération* (D) *appliquée à un invariant* I_p^e *conduit à un invariant* $I_{p+1}^{(d,e)}$.

Soit I_p^e un invariant absolu d'ordre p,

$$I_p^e = \int\int\cdots\int \sum A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}\, dx_{\alpha_1}\, dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p},$$

les fonctions $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$ vérifiant les relations

$$(19) \quad X(A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}) + \sum_i \left(A_{i\alpha_2\ldots\alpha_p} \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots + A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1} i} \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_p}} \right) = 0,$$

$$(24) \quad \sum_i A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1} i} X_i = 0.$$

L'invariant I_{p+1}^d correspondant a pour expression, en supposant par exemple que p soit pair,

$$I_{p+1}^d = \int\int\cdots\int \sum \mathcal{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}}\, dx_{\alpha_1}\, dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_{p+1}},$$

([1]) Il peut se faire que l'opération (E) appliquée à un invariant intégral I_p^0 conduise aussi à un invariant $I_p^{(d,e)}$.

où l'on a posé

$$\mathcal{A}_{\alpha_2\ldots\alpha_p i} = \frac{\partial A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{\alpha_2\ldots\alpha_p i}}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots + \frac{\partial A_{i\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}}.$$

Il s'agit de montrer que les relations

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p i} X_i = 0$$

ou

$$\sum_i X_i \left(\frac{\partial A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{\alpha_2\ldots\alpha_p i}}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots + \frac{\partial A_{i\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}} \right) = 0$$

sont des conséquences des relations (19) et (24).

La relation à vérifier peut s'écrire

$$X(A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}) + \sum_i X_i \left(\frac{\partial A_{\alpha_2\ldots\alpha_p i}}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots + \frac{\partial A_{i\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}} \right) = 0,$$

ou, en remplaçant $X(A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p})$ par sa valeur tirée de (19),

$$\sum_i X_i \frac{\partial A_{\alpha_2\ldots\alpha_p i}}{\partial x_{\alpha_2}} + \ldots + \sum_i X_i \frac{\partial A_{i\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}}$$
$$- \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_1}} A_{i\alpha_2\ldots\alpha_p} - \ldots - \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_p}} A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1} i}.$$

Mais, p étant *pair*, on a

$$A_{i\alpha_2\ldots\alpha_p} = - A_{\alpha_2\ldots\alpha_p i}, \qquad \ldots, \qquad A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1} i} = - A_{i\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}},$$

et il reste

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha_1}} \left(\sum_i A_{\alpha_2\ldots\alpha_p i} X_i \right) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_p}} \left(\sum_i A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1} i} X_i \right) = 0;$$

sous cette forme, on voit immédiatement que la relation à laquelle on est conduit résulte des relations (24).

Le même calcul prouve qu'on sera conduit à un invariant $I_{p+1}^{(d,e)}$ en appliquant l'opération (D) à un invariant I_p^0 pour lequel toutes les

sommes

$$\sum_i A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1} i} X_i$$

sont des constantes.

C. *Les opérations* (D) *et* (E) *sont permutables.*

En appliquant successivement les opérations (E) et (D) à un invariant I_p, on est conduit à un invariant $I_p^{(d,e)}$ (qui peut être identiquement nul). En appliquant les mêmes opérations dans l'ordre inverse au même invariant I_p, on obtient encore un invariant $I_p'^{(d,e)}$. *Les deux invariants* $I_p^{(d,e)}$ *et* $I_p'^{(d,e)}$ *sont identiques, au signe près.*

Soit

$$I_p = \int\int\cdots\int \sum A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_p}$$

un invariant absolu quelconque d'ordre p. En lui appliquant l'opération (E), on obtient un invariant I_{p-1}^e,

$$I_{p-1}^e = \int\int\cdots\int \sum C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1}} dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_{p-1}},$$

où

$$C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1}} = \sum_i A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} i} X_i.$$

De I_{p-1}^e on déduit ensuite l'invariant $I_p^{(d,e)}$,

$$I_p^{(d,e)} = \int\int\cdots\int \sum \mathcal{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_p},$$

où l'on a posé, en supposant, pour fixer les idées, que p soit *impair*,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}'_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} &= \frac{\partial C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}} + \frac{\partial C_{\alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} \alpha_p}}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots + \frac{\partial C_{\alpha_p \alpha_2 \ldots \alpha_{p-2}}}{\partial x_{\alpha_{p-1}}} \\
&= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_p}} (X_i A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} i}) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_1}} (X_i A_{\alpha_2 \ldots \alpha_p i}) + \ldots \\
&\quad + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_{p-1}}} (X_i A_{\alpha_p \alpha_1 \ldots \alpha_{p-2} i}).
\end{aligned}$$

D'autre part, en appliquant à I_p l'opération (D) la première, on

obtient un invariant I_{p+1},

$$I_{p+1}^d = \int\int \cdots \int \sum \mathcal{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p+1}} dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_{p+1}},$$

où l'on a posé, puisque p est *impair,*

$$\mathcal{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p i} = \frac{\partial A_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}}{\partial x_i} - \frac{\partial A_{\alpha_2 \ldots \alpha_p i}}{\partial x_{\alpha_1}} + \frac{\partial A_{\alpha_3 \ldots \alpha_p i \alpha_1}}{\partial x_{\alpha_2}} - \ldots - \frac{\partial A_{i \alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}},$$

ce qu'on peut encore écrire, d'après une remarque antérieure (§ 1),

$$\mathcal{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p i} = \frac{\partial A_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}}{\partial x_i} - \frac{\partial A_{\alpha_2 \ldots \alpha_p i}}{\partial x_{\alpha_1}} - \frac{\partial A_{\alpha_3 \ldots \alpha_p \alpha_1 i}}{\partial x_{\alpha_2}} - \ldots - \frac{\partial A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1} i}}{\partial x_{\alpha_p}}.$$

De I_{p+1}^d on déduit enfin, au moyen de l'opération (E), l'invariant $I_p'^{(d,e)}$,

$$I_p'^{(d,e)} = \int\int \cdots \int C'_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_p},$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} C'_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} &= \sum_i \mathcal{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p i} X_i \\ &= X(A_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}) - \sum_i X_i \frac{\partial A_{\alpha_1 \ldots \alpha_p i}}{\partial x_{\alpha_1}} - \ldots - \sum_i X_i \frac{\partial A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1} i}}{\partial x_{\alpha_p}}. \end{aligned}$$

En ajoutant les expressions de $\mathcal{A}'_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ et de $C'_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$, il vient

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}'_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} + \mathcal{C}'_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \\ &\quad = X(A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}) + \sum_i \left(A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1} i} \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_p}} + \ldots + A_{\alpha_2 \ldots \alpha_p i} \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_1}} \right), \end{aligned}$$

ou encore, p étant impair,

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}'_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} + \mathcal{C}'_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \\ &\quad = X(A_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}) + \sum_i \left(A_{i \alpha_2 \ldots \alpha_p} \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots + A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1} i} \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_p}} \right) = 0. \end{aligned}$$

On a donc, en définitive,

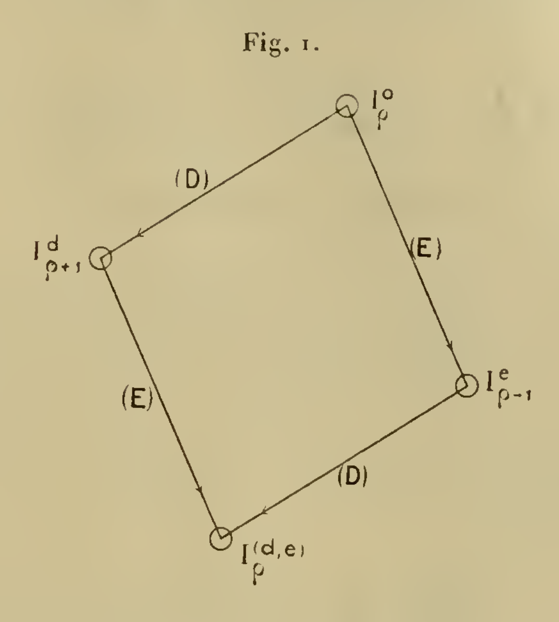
$$I_p^{(d,e)} = - I_p'^{(d,e)}.$$

9. Ces propriétés étant établies, supposons qu'on connaisse un invariant intégral absolu I_p^0 des équations (15) ($p > 1$).

En lui appliquant l'opération (E), nous obtiendrons un invariant I_{p-1}^e qui, *en général*, ne sera pas un invariant $I_{p-1}^{(d,e)}$. Donc, en appliquant à I_{p-1}^e l'opération (D), on obtiendra un invariant $I_p^{(d,e)}$ *non identiquement nul.*

Nous venons de voir qu'on obtiendrait le même résultat en procédant dans l'ordre inverse. La liaison entre les quatre invariants I_p^0, I_{p-1}^e, I_{p+1}^d, $I_p^{(d,e)}$ est représentée par le schéma suivant (*fig.* 1) :

Fig. 1.



Il peut arriver que le cycle soit incomplet. Partons toujours d'un invariant I_p^0; si l'opération (E) conduit à un invariant $I_{p-1}^{(d,e)}$, l'invariant $I_p^{(d,e)}$ sera identiquement nul, et l'invariant I_{p+1}^d déduit de I_p^0 par l'opération (D) sera un invariant $I_{p+1}^{(d,e)}$. Si l'on part d'un invariant I_p^d, l'opération (E) conduit à un invariant $I_{p-1}^{(d,e)}$; si l'on part d'un invariant I_p^e, l'opération (D) conduit à un invariant $I_{p+1}^{(d,e)}$.

Nous pouvons résumer tous les résultats qui précèdent dans l'énoncé suivant :

De tout invariant absolu $I_p (p > 1)$ *ou de tout invariant relatif* J_p, *on peut toujours déduire, par des additions, multiplications et différentiations, au moins un invariant* $I_r^{(d,e)}$, *non identiquement nul.*

La conclusion peut être en défaut pour un invariant absolu I_1; ce cas sera traité à part.

III.

10. Nous sommes maintenant amenés à examiner la question suivante :

Connaissant un invariant intégral $I_p^{(d,e)}$ *des équations différentielles* (15), *quel parti peut-on tirer de la connaissance de cet invariant pour l'intégration du système?*

Soit $I_p^{(d,e)}$ un invariant intégral d'ordre p,

$$(26) \qquad I_p^{(d,e)} = \int\int \cdots \int \sum A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_p};$$

les coefficients $A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}$ vérifiant les relations

$$\sum_{i=1}^{n} A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1} i} X_i = 0,$$

quels que soient les indices $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}$, les équations (15) entraînent les suivantes:

$$(27) \qquad \sum_{i=1}^{n} A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1} i} dx_i = 0.$$

Les équations (27), linéaires et homogènes en $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$, se réduisent donc à m équations distinctes, m étant inférieur ou au plus égal à $n-1$. Si $m = n-1$, les deux systèmes (15) et (27) sont équivalents; mais, lorsque m est inférieur à $n-1$, le système (27) est plus général que le système proposé (15) et toute intégrale du système (27)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const.}$$

est aussi une intégrale première du système (15). Dans ce cas, la connaissance de l'invariant $I_p^{(d,e)}$ permet de simplifier le problème de l'intégration. Nous allons montrer en effet que *les m équations distinctes auxquelles se réduit le système* (27) *forment un système complètement intégrable.*

Rappelons d'abord le résultat suivant de M. Frobenius ([1]). Étant données k équations

$$(28) \qquad A_{\mu 1}\, dx_1 + \ldots + A_{\mu n}\, dx_n = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k)$$

se réduisant à m équations distinctes ($m < n$), pour que ces m équations forment un système complètement intégrable, il faut et il suffit que les relations

$$(29) \qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i v_j \left(\frac{\partial A_{\mu i}}{\partial x_j} - \frac{\partial A_{\mu j}}{\partial x_i} \right) = 0$$

soient des conséquences des relations

$$(30) \qquad \sum_{i=1}^{n} A_{\mu i}\, u_i = 0, \qquad \sum_{=1}^{n} A_{\mu j}\, v_j = 0.$$

Les coefficients $A_{\mu i}$ des équations (28) sont, pour le système considéré ici, de la forme $A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} i}$, en désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}$ une combinaison des n premiers nombres $(p-1)$ à $(p-1)$. La différence

$$\frac{\partial A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} i}}{\partial x_j} - \frac{\partial A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} j}}{\partial x_i}$$

est une combinaison linéaire des dérivées

$$\frac{\partial A_{\alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} i j}}{\partial x_{\alpha_1}}, \quad \frac{\partial A_{\alpha_3 \ldots \alpha_{p-1} i j \alpha_1}}{\partial x_{\alpha_2}}, \quad \ldots,$$

d'après les équations de condition (6) ou (6)′, qui expriment que

$$\Sigma A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}\, dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p}$$

est une différentielle exacte.

Il nous suffira donc de vérifier que les relations

$$(31) \qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i v_j \frac{\partial A_{\alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{p-1} i j}}{\partial x_{\alpha_1}} = 0$$

([1]) Frobenius, *Journal de Crelle*, t. 82, 1877, p. 276. *Voir* aussi Forsyth, *Theory of differential equations*, part I, p. 51. Frobenius suppose $k < n$; mais on peut aussi supposer $k > n$, comme c'est le cas dans l'exemple traité ici.

sont des conséquences des relations (30). Nous pouvons écrire l'équation (31)

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_{\alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} ij}}{\partial x_{\alpha_1}} v_j = 0;$$

d'autre part, de la relation (30),

$$\sum_{j=1}^{n} A_{\alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} ij}\, v_j = 0,$$

on déduit

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_{\alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} ij}}{\partial x_{\alpha_1}} v_j + \sum_{j=1}^{n} A_{\alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_{\alpha_1}} = 0,$$

et a relation à vérifier peut encore s'écrire

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{\alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_{\alpha_1}} u_i = 0$$

ou

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial x_{\alpha_1}} \sum_{i=1}^{n} A_{\alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} ji} u_i = 0,$$

et cette dernière condition est évidemment une conséquence des relations (30).

Lorsque $m = n - 1$, il semble que la méthode ne donne aucune simplification. Mais on peut alors trouver un multiplicateur [1], comme on le verra plus loin (nº **11**) dans un cas particulier.

11. Nous allons traiter en détail les cas les plus simples, $p = 1$ et $p = 2$.

Soit $I_1^{(d,e)}$ un invariant du premier ordre du système (15),

$$I_1^{(d,e)} = \int A_1\, dx_1 + A_2\, dx_2 + \ldots + A_n\, dx_n;$$

---

(1) La démonstration dans le cas général sera donnée dans un autre travail, consacré plus spécialement à l'étude de ces systèmes (27).

les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$ doivent vérifier les relations

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots + A_n X_n = 0,$$
$$\frac{\partial A_i}{\partial x_k} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i}.$$

Il s'ensuit que $A_1 dx_1 + \ldots + A_n dx_n$ est une différentielle exacte du, et $u = c$ est une intégrale première des équations (15). *De tout invariant du premier ordre* $I_1^{(d,e)}$ *on déduit donc une combinaison intégrable des équations* (15).

Passons au cas de $p = 2$. Soit

$$I_2^{(d,e)} = \int\int \sum A_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

un invariant $I_2^{(d,e)}$ du second ordre. Les coefficients A_{ik} vérifient les relations

$$\text{(32)} \qquad \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial A_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{li}}{\partial x_k} = 0, \qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots, n).$$

$$\text{(33)} \qquad A_{i1} X_1 + A_{i2} X_2 + \ldots + A_{in} X_n = 0$$

Les n relations

$$\text{(34)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} A_{11}\, dx_1 + A_{12}\, dx_2 + \ldots + A_{1n}\, dx_n = 0, \\ A_{21}\, dx_1 + A_{22}\, dx_2 + \ldots + A_{2n}\, dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{n1}\, dx_1 + A_{n2}\, dx_2 + \ldots + A_{nn}\, dx_n = 0 \end{array} \right.$$

peuvent donc être considérées comme des combinaisons linéaires des équations (15). En vertu des relations (32), on peut déterminer n fonctions $B_1, B_2, \ldots, B_n$ telles qu'on ait

$$A_{ik} = \frac{\partial B_i}{\partial x_k} - \frac{\partial B_k}{\partial x_i},$$

et le système d'équations différentielles (34) est un covariant de la forme de Pfaff [1],

$$\text{(35)} \qquad B_1\, dx_1 + B_2\, dx_2 + \ldots + B_n\, dx_n;$$

---

[1] DARBOUX, *Sur le problème de Pfaff* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. VI, 1882, p. 14-36 et 49-68).

d'ailleurs ce système est toujours compatible, puisqu'il admet toutes les solutions du système proposé (15). Il en résulte que le déterminant de Pfaff correspondant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

est toujours nul. Cela posé, deux cas sont à distinguer, suivant la parité de n.

Supposons en premier lieu n pair; Δ étant nul, il en sera de même de tous ses mineurs du premier ordre, et les n équations (34) se réduisent en réalité à $n-p-1$ équations distinctes ($p > 0$). Ces équations, formant un système complètement intégrable, admettent ($n-p-1$) intégrales distinctes

$$\varphi_1 = C_1, \quad \varphi_2 = C_2, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-p-1} = C_{n-p-1},$$

qu'on obtiendra par l'intégration d'un système complet ou d'un système de $n-p-1$ équations différentielles. Puisque ces intégrales $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-p-1}$ appartiennent aussi au système (15), on voit que le problème de l'intégration a été simplifié, puisqu'on peut obtenir ($n-p-1$) intégrales premières par l'intégration d'un système de ($n-p-1$) équations différentielles.

Si n est impair, Δ est toujours nul. Si tous ses mineurs du premier ordre sont nuls aussi, le système (34) se réduit encore à ($n-p-1$) équations distinctes ($p > 0$), et la conclusion est la même que tout à l'heure. Mais, si tous les mineurs du premier ordre de Δ ne sont pas nuls, le système (34) comprend ($n-1$) équations distinctes et il est entièrement équivalent au système (15). Dans ce cas, *on peut trouver un multiplicateur du système proposé* (15).

Il suffit de rappeler les propriétés suivantes des déterminants symétriques gauches. Soit $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ un système de $2r$ nombres entiers, choisis parmi les n premiers nombres. Les expressions $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda)$ se définissent de proche en proche au moyen de la relation de récurrence

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda) = & (\alpha, \beta)(\gamma, \delta, \ldots, \lambda) \\ & + (\alpha, \gamma)(\delta, \ldots, \lambda, \beta) + \ldots + (\alpha, \lambda)(\beta, \gamma, \ldots, \varkappa)\end{aligned}$$

jointe à la relation

$$(\alpha, \beta) = A_{\alpha\beta}.$$

Étant données deux permutations $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda)$ et $(\alpha', \beta', \gamma', \ldots, \lambda')$ qui ne diffèrent que par l'ordre des indices, on a

$$(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda) = \pm (\alpha', \beta', \gamma', \ldots, \lambda'),$$

le signe + convenant au cas où les deux permutations sont de même classe, et le signe — au cas contraire.

Cela posé, soit $n = 2p + 1$, et supposons que tous les mineurs du premier ordre du déterminant Δ ne soient pas nuls. On tire alors des relations (34) un système équivalent :

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dx_1}{(2, 3, 4, \ldots, 2p+1)} = \frac{dx_2}{(3, 4, \ldots, 2p+1, 1)} = \ldots \\ &\qquad = \frac{dx_{2p+1}}{(1, 2, 3, 4, \ldots, 2p)}. \end{aligned} \right.$$

Ce système (36) ne diffère pas du système (15). Mais *il admet le multiplicateur* $M = 1$. Il suffit, pour le montrer, de vérifier qu'on a bien

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial(2, 3, 4, \ldots, 2p+1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(3, 4, \ldots, 2p+1, 1)}{\partial x_2} \\ &\qquad + \frac{\partial(4, 5, \ldots, 2p+1, 1, 2)}{\partial x_3} + \ldots = 0. \end{aligned} \right.$$

Un terme quelconque du premier membre de cette relation est de la forme

$$\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda),$$

$(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda)$ étant une permutation des $(2p - 2)$ nombres entiers qui restent après la suppression des trois indices i, k, l. Or, les trois dérivées $\frac{dA_{ik}}{dx_l}$, $\frac{dA_{kl}}{dx_i}$, $\frac{dA_{li}}{dx_k}$ ont, il est facile de le voir, le même multiplicateur. On a, par exemple, la somme

$$\left(\frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{12}}{\partial x_3}\right)(4, 5, \ldots, 2p+1),$$

et tous les autres termes peuvent être groupés d'une façon analogue. La relation (37) est donc une conséquence des relations (32).

12. Soit I_1 un invariant intégral absolu quelconque du système (15),

$$I_1 = \int A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots + A_n dx_n;$$

l'opération (E), appliquée à cet invariant absolu, conduit à une intégrale première

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots + A_n X_n = \text{const.},$$

théorème dû à M. Poincaré. Ce résultat peut être illusoire, si $A_1 X_1 + \ldots + A_n X_n$ se réduit à une constante. Nous allons examiner le cas plus général où l'on connaît un invariant relatif du système (15) :

$$(38) \qquad J_1 = \int A_1 dx_1 + \ldots + A_n dx_n.$$

De cet invariant J_1 nous déduisons par l'opération (D) un invariant I_2^d,

$$(39) \qquad I_2^d = \int\int \sum \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \right) dx_i \, dx_k,$$

et de l'invariant I_2^d nous déduisons ensuite par l'opération (E) un invariant $I_1^{(d,e)}$,

$$(40) \qquad I_1^{(d,e)} = \int \mu_1 dx_1 + \mu_2 dx_2 + \ldots + \mu_n dx_n,$$

où l'on a posé

$$(41) \qquad \begin{cases} \mu_i = a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 + \ldots + a_{in} X_n, \\ a_{ik} = \dfrac{\partial A_i}{\partial x_k} - \dfrac{\partial A_k}{\partial x_i} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Si tous les μ_i ne sont pas nuls à la fois, *on obtiendra donc par des quadratures une intégrale première du système* (15) :

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int \mu_1 dx_1 + \mu_2 dx_2 + \ldots + \mu_n dx_n = \text{const.}$$

La proposition s'applique aussi à un invariant intégral absolu I_1,

pourvu que tous les coefficients μ_i ne soient pas nuls; mais l'intégrale première à laquelle on est conduit n'est autre que l'intégrale première donnée par le théorème de M. Poincaré.

Il suffit de vérifier les égalités

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(A_1 X_1 + \ldots + A_n X_n) + X_1 a_{i1} + \ldots + X_n a_{in} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui deviennent, en remplaçant les a_{ik} par leurs expressions,

$$A_1 \frac{\partial X_1}{\partial x_i} + \ldots + A_n \frac{\partial X_n}{\partial x_i} + X(A_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On retrouve précisément les relations qui expriment que I_1 est un invariant intégral absolu. Mais, si l'on part d'un invariant intégral relatif, des quadratures sont en général nécessaires pour obtenir l'intégrale première U.

15. La proposition ne s'applique pas si l'invariant $I_1^{(d,e)}$ représenté par la formule (40) est identiquement nul. L'invariant du second ordre (39) est alors un invariant $I_2^{(d,e)}$; si cet invariant $I_2^{(d,e)}$ n'est pas lui-même identiquement nul, on a vu plus haut comment la connaissance de cet invariant permet de simplifier le problème de l'intégration. L'invariant $I_2^{(d,e)}$ ne peut être identiquement nul que s'il a été déduit par l'opération (D) d'un invariant absolu I_1^d.

Si cet invariant I_1^d est $I_1^{(d,e)}$, on a vu comment il donnait une intégrale première par des quadratures (n° 11). Le seul cas où la méthode paraît ne donner aucune simplification est celui d'un invariant absolu I_1^d, qui n'est pas en même temps $I_1^{(d,e)}$. Soit

$$I_1^d = \int A_1\,dx_1 + \ldots + A_n\,dx_n$$

cet invariant; l'expression $A_1\,dx_1 + \ldots + A_n\,dx_n$ est une différentielle exacte dU. D'autre part, l'expression

$$A_1 X_1 + \ldots + A_n X_n$$

ne peut être nulle, sans quoi I_1^d sera $I_1^{(d,e)}$; d'ailleurs, les coefficients μ_i étant tous nuls, cette expression se réduit à une constante K *différente*

de zéro. Des équations (15) on déduit alors

$$\frac{A_1 dx_1 + \ldots + A_n dx_n}{K} = dt,$$

et l'on a, par des quadratures, une intégrale première qui contient t :

$$\int A_1 dx_1 + \ldots + A_n dx_n = Kt + C.$$

14. Le résultat général du n° 12 établit un lien entre la recherche des combinaisons intégrables du système (15) et les invariants relatifs du premier ordre de ce système. Il est facile de mettre directement cette liaison en évidence.

Trouver une combinaison intégrable des équations (15) revient à trouver un système de n fonctions $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ telles que $\mu_1 dx_1 + \mu_2 dx_2 + \ldots + \mu_n dx_n$ soit une différentielle exacte et qu'on ait en même temps

$$\mu_1 X_1 + \ldots + \mu_n X_n = 0. \tag{42}$$

On satisfait à cette dernière relation en posant

$$\mu_i = \lambda_{i1} X_1 + \lambda_{i2} X_2 + \ldots + \lambda_{in} X_n, \tag{43}$$

les λ_{ik} étant de nouvelles fonctions des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfaisant aux conditions

$$\lambda_{ii} = 0, \qquad \lambda_{ik} + \lambda_{ki} = 0.$$

La condition d'intégrabilité $\frac{\partial\mu_i}{\partial x_k} = \frac{\partial\mu_k}{\partial x_i}$ s'écrit alors

$$X(\lambda_{ik}) - \sum_{h=1}^{n} X_h \rho_{ihk} + \sum_{h=1}^{n}\left(\lambda_{hk}\frac{\partial X_h}{\partial x_i} + \lambda_{ih}\frac{\partial X_h}{\partial x_k}\right) = 0, \tag{44}$$

en posant

$$\rho_{ihk} = \frac{\partial\lambda_{ih}}{\partial x_k} + \frac{\partial\lambda_{hk}}{\partial x_i} + \frac{\partial\lambda_{ki}}{\partial x_h}.$$

Si nous comparons ces conditions (44) aux conditions

$$X(a_{ik}) + \sum_{h=1}^{n}\left(a_{hk}\frac{\partial X_h}{\partial x_i} + a_{ih}\frac{\partial X_h}{\partial x_k}\right) = 0, \tag{45}$$

qui expriment que

$$I_2 = \int\int \sum a_{ik} dx_i dx_k$$

est un invariant intégral du second ordre, nous voyons qu'elles deviennent identiques en remplaçant λ_{ik} par a_{ik}, pourvu qu'on ait

$$\frac{\partial a_i h}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{hk}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_h} = 0,$$

c'est-à-dire toutes les fois que l'invariant I_2 est I_2^d, ou a été déduit d'un invariant J_1 ou I_1 par l'opération (D).

15. La combinaison de calcul qui conduit à ce théorème peut se justifier *a priori* par une remarque qui a été le point de départ de ce travail et que je développerai seulement, pour plus de simplicité, dans le cas de trois variables.

Considérons un système de trois équations différentielles du premier ordre que j'écrirai, avec les notations ordinaires,

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = dt, \tag{46}$$

X, Y, Z ne dépendant pas de t, et soit

$$J_1 = \int a\,dx + b\,dy + c\,dz$$

un invariant intégral relatif de ce système, que nous pouvons remplacer par un invariant intégral absolu du second ordre

$$I_2^d = \int\int A\,dx\,dy + B\,dy\,dz + C\,dz\,dx,$$

où

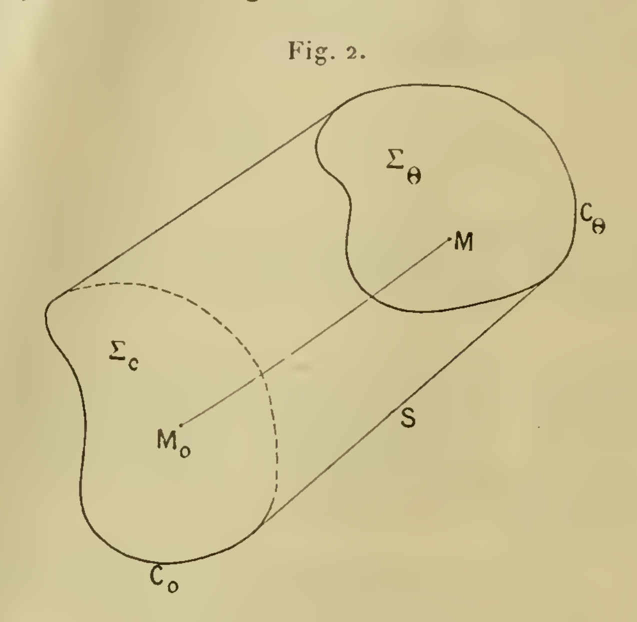
$$A = \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x}, \qquad B = \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial y}, \qquad C = \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial z},$$

l'expression sous le signe $\int\int$ étant une différentielle exacte.

Soit C_0 une courbe fermée quelconque, qui n'est tangente en aucun de ses points à la caractéristique des équations (46) issue de ce point; prenons une surface Σ_0 limitée par Γ_0 et telle que la caractéristique issue d'un point quelconque ne soit pas tangente à la surface.

Soit M_0 un point quelconque de Σ_0 de coordonnées x_0, y_0, z_0; si nous prenons pour valeur initiale de t la valeur zéro, les valeurs initiales de x, y, z étant x_0, y_0, z_0 dans les équations (46), le point de coordonnées (x, y, z) décrit un segment de caractéristique M_0M lorsque t

Fig. 2.



varie de zéro à θ. Si θ est suffisamment petit, le lieu de ces caractéristiques est un volume analogue à un cylindre, limité par deux surfaces Σ_0 et Σ_θ, et par une surface S engendrée par les segments de caractéristiques issues des différents points de C_0, lorsque t varie de zéro à θ.

L'intégrale I_2^d étendue à toute la surface extérieure qui limite ce volume est nulle; d'autre part, comme I_2^d est un invariant intégral, l'intégrale prise suivant le côté extérieur de Σ_θ est égale à l'intégrale prise suivant le côté intérieur de Σ_0. Par conséquent, l'intégrale I_2^d étendue à toute la surface S est nulle. Si nous considérons cette intégrale comme une fonction $F(\theta)$ de θ, nous pouvons donc écrire qu'on a $F'(\theta) = 0$. Pour évaluer cette dérivée, supposons les coordonnées d'un point de C_0 exprimées en fonction d'un paramètre variable u de telle façon qu'on obtienne tous les points de cette courbe en faisant varier u de zéro à U; les coordonnées d'un point de la surface S sont alors des fonctions de deux variables u et t,

$$(47)\qquad x = f_1(t, u), \qquad y = f_2(t, u), \qquad z = f_3(t, u),$$

et l'on obtient tous les points de cette surface en faisant varier u de zéro

à U et t de o à θ. La fonction $F(\theta)$ a alors pour expression

$$F(\theta)=\iint\left[A\frac{D(x,y)}{D(t,u)}+B\frac{D(y,z)}{D(t,u)}+C\frac{D(z,x)}{D(t,u)}\right]dt\,du,$$

cette intégrale double étant étendue au domaine qu'on vient de définir, et x, y, z étant remplacées par les expressions (47) dans A, B, C. On peut encore écrire cette formule, en tenant compte des équations différentielles (46) elles-mêmes,

$$\begin{aligned}F(\theta)=\int_0^\theta dt\int_0^U\Big[&A\left(X\frac{\partial y}{\partial u}-Y\frac{\partial x}{\partial u}\right)\\&+B\left(Y\frac{\partial z}{\partial u}-Z\frac{\partial y}{\partial u}\right)+C\left(Z\frac{\partial x}{\partial u}-X\frac{\partial z}{\partial u}\right)\Big]du.\end{aligned}$$

Pour $\theta=0$, la dérivée $F'(\theta)$ se réduit à

$$\int_0^U\left[(CZ-AY)\frac{\partial x}{\partial u}+(AX-BZ)\frac{\partial y}{\partial u}+(BY-CX)\frac{\partial z}{\partial u}\right]du,$$

c'est-à-dire à l'intégrale curviligne

$$\int_{(C_0)}(CZ-AY)\,dx+(AX-BZ)\,dy+(BY-CX)\,dz,$$

prise le long de C_0. Cette intégrale étant nulle, quelle que soit la courbe fermée C_0, l'expression

$$(48)\qquad (CZ-AY)\,dx+(AX-BZ)\,dy+(BY-CX)\,dz$$

est donc une différentielle exacte.

D'ailleurs, on a

$$X(CZ-AY)+Y(AX-BZ)+Z(BY-CX)=0,$$

et, par suite, l'expression (48) est une combinaison intégrable des équations (46).

Si l'on a en même temps

$$CZ-AY=0,\qquad AX-BZ=0,\qquad BY-CX=0,$$

on en déduit

$$\frac{X}{B} = \frac{Y}{C} = \frac{Z}{A},$$

et le système (46) est équivalent au système

$$(46)' \qquad \frac{dx}{B} = \frac{dy}{C} = \frac{dz}{A};$$

ce nouveau système admet pour multiplicateur l'unité, car on tire des expressions de A, B, C la relation

$$\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} = 0.$$

16. Pour terminer, nous appliquerons encore le théorème général aux invariants d'ordre n et d'ordre $n-1$. Soit I_n un invariant d'ordre n,

$$(49) \qquad I_n = \int\int\ldots\int M\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n;$$

toute intégrale multiple d'ordre n pouvant être remplacée par une intégrale multiple d'ordre $n-1$ étendue à une multiplicité fermée, on peut considérer I_n comme un invariant I_n^d. L'opération (E) appliquée à cet invariant conduira donc à un invariant $I_{n-1}^{(d,e)}$.

Supposons n impair; nous prendrons

$$A_{12\ldots n} = A_{23\ldots n1} = A_{34\ldots n12} = \ldots = M,$$

et l'invariant $I_{n-1}^{(d,e)}$ aura pour expression

$$(50) \qquad I_{n-1}^{(d,e)} = \int\int\ldots\int M[X_n dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1} + X_1\, dx_2 \ldots dx_n + \ldots].$$

L'expression sous les signes d'intégration doit être une différentielle exacte; comme $n-1$ est pair par hypothèse, on a donc la relation

$$(51) \qquad \frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(MX_2)}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial(MX_n)}{\partial x_n} = 0,$$

ce qui montre que M est un multiplicateur, et nous retrouvons un théorème de M. Poincaré. Le système d'équations différentielles (27),

associé à l'invariant $I_{n-1}^{(d,e)}$ est, dans le cas actuel, identique au système (15) lui-même.

La conclusion est la même si n est pair. Nous devons prendre

$$A_{12\ldots n} = -A_{23\ldots n1} = A_{34\ldots n12} = \ldots = M,$$

et l'invariant $I_{n-1}^{(d,e)}$ a pour expression

$$(50)' \quad I_{n-1}^{(d,e)} = \int\int\ldots\int M[X_n dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1} - X_1 dx_2 \ldots dx_n + \ldots];$$

mais, $n-1$ étant impair, la condition (51) ne change pas.

Supposons enfin que nous connaissions un invariant I_{n-1}. Plusieurs cas sont à distinguer, suivant les hypothèses qu'on peut faire sur cet invariant. Si l'on a un invariant $I_{n-1}^{(d,e)}$, il est de la forme (50) ou (50'), suivant la parité de n, et la relation (51) est encore vérifiée, de sorte que M est un multiplicateur.

Un invariant I_{n-1} qui n'est pas I_{n-1}^{d} donne un invariant I_n par l'opération (D) et par suite un multiplicateur.

Mais, si l'on applique l'opération (E) à un invariant I_{n-1}^{0}, on obtient un invariant I_{n-2}^{e}, et il semble que l'opération (D) sera nécessaire pour arriver finalement à un invariant $I_{n-1}^{d,e}$, c'est-à-dire à un multiplicateur. Mais, dans ce cas, il se produit une simplification, ainsi qu'il résulte d'un théorème de M. Kœnigs [1]; le système d'équations différentielles (27), associé à l'invariant I_{n-2}^{e}, est complètement intégrable, et l'on obtient ainsi une équation

$$A(f) = \sum_i \mu_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

qui, jointe à l'équation $X(f) = 0$, forme avec celle-ci un système complètement intégrable.

Il est facile de comprendre la raison de cette simplification et de voir en même temps pourquoi elle ne se produit pas dans le cas général. Supposons que, par un changement de variables, on ait ramené le

(1) *Sur les invariants intégraux* (*Comptes rendus*, t. CXLII, 6 janv. 1906, p. 25-27).

système (15) à la forme

$$(52)\qquad \frac{dx_1}{0} = \frac{dx_2}{0} = \frac{dx_{n-1}}{0} = \frac{dx_n}{1} = dt,$$

et soit I_{n-1} un invariant intégral d'ordre $n-1$

$$I_{n-1} = \int\int\ldots\int \mu_1\,dx_2\ldots dx_n + \mu_2\,dx_3\ldots dx_n\,dx_1 + \ldots,$$

les coefficients $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ ne dépendant que des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

L'opération (E) appliquée à cet invariant I_{n-1} conduit à un invariant I^e_{n-2}, *où ne figurent ni x_n ni dx_n* :

$$I^{(e)}_{n-2} = \int\int\ldots\int \sum C_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}}\,dx_{\alpha_1}\,dx_{\alpha_2}\ldots dx_{\alpha_{n-2}}.$$

Le système d'équations différentielles (27), associé à cet invariant I^e_{n-2}, est de la forme

$$\frac{dx_1}{\lambda_1} = \frac{dx_2}{\lambda_2} = \ldots = \frac{dx_{n-1}}{\lambda_{n-1}},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ ne dépendant pas de x_n, et les deux équations

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

forment bien un système complet.

Prenons au contraire un invariant intégral du système (52) d'ordre inférieur à $n-1$, par exemple un invariant I_2

$$I_2 = \int\int \sum A_{ik}\,dx_i\,dx_k;$$

les coefficients A_{ik} sont indépendants de x_n, et l'invariant I^e_1 qu'on en déduit par l'opération (E) est de la forme

$$I^e_1 = \int C_1\,dx_1 + C_2\,dx_2 + \ldots + C_{n-1}\,dx_{n-1},$$

$C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ étant des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ qui peuvent être quelconques. Le système (27), associé à cet invariant I_1^c, se réduit ici à l'équation unique

$$C_1\,dx_1 + C_2\,dx_2 + \ldots + C_{n-1}\,dx_{n-1} = 0,$$

et il est clair que, en général, cette équation n'est pas complètement intégrable si n est supérieur à 3.

Sur la sommabilité des séries d'une variable réelle ou complexe;

Par M. A. BUHL,

Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier.

Objet du Mémoire. — Je reviens, dans ce travail, sur des points laissés en suspens vers la fin de mon Mémoire *Sur la généralisation des séries trigonométriques*, publié ici même. Mais ces nouvelles pages pourront être lues indépendamment dudit Mémoire, car les méthodes de sommabilité employées, vues d'une manière suffisamment générale, sont celles qui s'appliquent à bien d'autres séries, notamment à la série de Taylor.

J'ai même pu réindiquer brièvement, sans recourir à la théorie des intégrales curvilignes, tous les résultats que j'ai déjà donnés, en m'appuyant sur cette théorie, dans différentes Notes des *Comptes rendus* et du *Bulletin des Sciences mathématiques*, résultats qui me raissent apporter d'intéressants compléments à ceux dus surtout à MM. Mittag-Leffler et Borel.

I. — Généralités. Cas des séries trigonométriques.

1. Soient les deux séries

$$F(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots, \tag{1}$$

$$f(\xi) = c_0(\xi) + c_1(\xi) + c_2(\xi) + \ldots, \tag{2}$$

qui sont supposées représenter les premiers membres dans des conditions connues, c'est-à-dire lorsque x et ξ sont dans de certains inter-

valles ou dans de certaines régions du plan s'il s'agit de variables complexes. Nous aurons à supposer de plus, dans ce qui suit, que $f(\xi)$ devient infinie pour de certaines valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de ξ, mais que la série (2) reste propre à représenter $f(\xi)$ dans le voisinage immédiat de tous ces α, ou tout au moins quand ξ tend vers un α d'une manière bien déterminée.

Si l'on forme le produit $F(x)f(\xi)$, on peut l'écrire

$$\begin{array}{l} \quad c_0 u_0 + c_0 u_1 + c_0 u_2 + \ldots \\ + c_1 u_0 + c_1 u_1 + c_1 u_2 + \ldots \\ + c_2 u_0 + c_2 u_1 + c_2 u_2 + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Désignons par s_n la somme des $n+1$ premiers termes de (1). Dans le Tableau précédent, la diagonale principale et tous les termes placés au-dessous peuvent se représenter par

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n s_n.$$

En tenant compte des autres termes, on arrive facilement à la formule

$$F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n s_n}{f(\xi)} + \sum_{n=0}^{n=\infty} u_{n+1} \frac{c_0 + c_1 + \ldots + c_n}{f(\xi)}.$$

On démontrerait sans aucune peine que le second sigma tend vers zéro si ξ tend vers l'une des valeurs α précédemment définies, *à condition que la série* (1) *soit convergente*. On a donc à la fois

$$(3) \qquad F(x) = \lim_{n=\infty} s_n, \qquad F(x) = \lim_{\xi=\alpha} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n s_n}{f(\xi)}.$$

2. Examinons immédiatement quelques cas où la *fonction sommatrice* $f(\xi)$ prend une forme particulière.

Pour

$$f(\xi) = \frac{1}{1-\xi} = 1 + \xi + \xi^2 + \ldots,$$

on a (formule de Cesàro)

$$F(x) = \lim_{\xi=1} \frac{s_0 + \xi s_1 + \xi^2 s_2 + \ldots}{1 + \xi + \xi^2 + \ldots} = \lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{}$$

Pour (p désignant un entier positif)

$$f(\xi) = \frac{1}{1 - \xi^p} = 1 + \xi^p + \xi^{2p} + \ldots,$$

on a

$$F(x) = \lim_{\xi=\alpha} \frac{s_0 + \xi^p s_p + \xi^{2p} s_{2p} + \ldots}{1 + \xi^p + \xi^{2p} + \ldots},$$

α désignant l'une quelconque des racines de l'équation binome

$$\xi^p - 1 = 0,$$

racine vers laquelle ξ doit tendre sans sortir du cercle $|\xi| = 1$. Si l'on prend simplement la racine 1, la formule précédente devient

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_p + s_{2p} + \ldots + s_{(n-1)p}}{n}.$$

Remarquons, *la série* (1) *étant toujours supposée convergente*, qu'on peut prendre p assez grand pour que les sommes $s_p, s_{2p}, \ldots, s_{(n-1)p}$ diffèrent les unes des autres d'aussi peu qu'on voudra. Cela permet d'écrire

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \left(\frac{s_0}{n} + \frac{n-1}{n} s_{(n-1)p} \right) = \lim_{n=\infty} s_{(n-1)p}.$$

On passe ainsi *directement* de la seconde à la première des formules (3) et, par suite, on peut dire que la première est un cas particulier de la seconde.

5. Il est inutile d'augmenter le nombre des exemples. On voit qu'à toute fonction $f(\xi)$, possédant des infinis et développable de la manière indiquée, correspondent une ou plusieurs formules de sommabilité. Ces dernières, si l'on se borne à ce qui précède, n'ont évidemment qu'un intérêt de pure curiosité, car, si la série (1) converge, il sera plus simple d'utiliser cette formule même, pour le calcul de $F(x)$, que de passer par la seconde des formules (3).

On sait cependant que certaines séries *indéterminées* pour lesquelles la formule (3_1) n'offre aucun sens deviennent sommables au moyen de (3_2). C'est dans cet esprit que Cesàro a étudié sa formule. Et l'on verra plus loin comment une généralisation convenable permet d'arriver jusqu'au problème général du prolongement analytique tel qu'il a été envisagé par M. Mittag-Leffler.

Dans un autre ordre d'idées, on peut étudier directement comment les seconds membres de (3_1) et de (3_2) tendent vers $F(x)$, et il peut parfaitement arriver que ce soit la seconde expression dont l'étude soit la plus simple. C'est notamment ce qu'a montré M. L. Fejér en appliquant la formule de Cesàro à la série de Fourier (*Mathematische Annalen*, t. LVIII, 1904).

J'ai montré *directement* que le résultat de M. Fejér subsistait pour les *séries trigonométriques généralisées* (ce *Journal*, 1908). Prenant encore comme exemple la série de Fourier, les formules (3_1) et (3_2) peuvent être l'objet de nouvelles et intéressantes comparaisons.

4. Ayant à revenir sur des résultats déjà exposés par une méthode directe dans ma Note *Sur la sommabilité des séries de Fourier* (*Comptes rendus*, 13 janvier 1908), je reprends les notations de cette communication et considère les deux développements de Fourier

$$(4) \quad F(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\xi)\,d\xi + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\int_0^{2\pi} F(\xi)\cos n(\xi-\theta)\,d\xi,$$

$$(5) \quad f(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\,d\zeta + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\cos n(\zeta-\tau)\,d\zeta.$$

Il faut supposer que la fonction $f(\tau)$ présente dans l'intervalle $0, 2\pi$ au moins un infini $\tau = \alpha$ (il pourrait y en avoir plusieurs) au voisinage duquel la formule (5) reste valable. Alors, si l'on considère une suite de nombres α_k tendant vers α quand k croît indéfiniment, et si l'on pose

$$(6) \qquad S_k = \frac{c_0(\alpha_k)s_0 + c_1(\alpha_k)s_1 + \ldots + c_k(\alpha_k)s_k}{f(\alpha_k)},$$

on doit avoir

$$(7) \qquad F(\theta) = S_0 + (S_1 - S_0) + (S_2 - S_1) + \ldots.$$

Si l'on observe que

$$s_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\xi)\,\frac{\sin(2k+1)\frac{\xi-\theta}{2}}{\sin\frac{\xi-\theta}{2}}\,d\xi,$$

et que c_k est le $(k+1)^{\text{ième}}$ terme de (5), on trouve facilement, bien que les calculs soient un peu encombrants, que S_k est la somme de deux intégrales doubles dont j'ai d'ailleurs indiqué la forme dans la Note précitée. *Une telle expression,* tendant vers $F(\theta)$ quand k croît indéfiniment, *généralise l'intégrale simple de Dirichlet.* Elle dépend *formellement* du choix de $f(\tau)$, c'est-à-dire prend des formes diverses si l'on attribue des formes diverses à $f(\tau)$; au fond, cette dernière fonction ne joue un rôle *qu'en ses infinis* tels que $\tau = \alpha$.

Cette remarque donne une première idée du rôle que les séries divergentes peuvent jouer en Analyse. Je ne fais ici aucune allusion à l'idée de M. Borel, qui consiste à attribuer un sens à une série divergente moyennant d'autres procédés de calcul que la sommation terme à terme; j'y viendrai tout à l'heure.

Pour l'instant, il s'agit d'une remarque beaucoup plus élémentaire, qui consiste en ce qu'une série, même irrémédiablement divergente [telle (5) pour $\tau = \alpha$], peut servir à quelque chose. *C'est un instrument de sommation vis-à-vis d'autres séries.*

C'est ainsi que

$$\frac{1}{1-\xi} = 1 + \xi + \xi^2 + \ldots$$

conduit, pour $\xi = 1$, à la formule de Cesàro rappelée au n° **2**.

5. *Transformation des solutions des équations linéaires aux dérivées partielles.* — Soient maintenant les expressions

$$(8)\quad U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\xi)\,d\xi + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\int_0^{2\pi} F(\xi)\,r^n \cos n(\xi-\theta)\,d\xi,$$

$$(9)\quad V(\rho,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\,d\zeta + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\,\rho^n \cos n(\zeta-\tau)\,d\zeta,$$

qui sont respectivement des solutions des équations de Laplace

$$(10)\quad \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}=0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho}=0.$$

Ces solutions prennent l'une la valeur $F(\theta)$ sur la circonférence $r=1$, l'autre la valeur $f(\tau)$ sur $\rho=1$. F et f sont supposées représentables par les séries de Fourier (4) et (5).

Soient toujours s_n la somme des $(n+1)$ premiers termes de (8), c_n le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme de (9).

Imaginons encore que $f(\tau)$ présente pour $\tau=\alpha$ un infini, tout comme au n° **4**.

Enfin, soit une suite de deux nombres associés ρ_k, τ_k telle que ρ_k tende vers 1 et τ_k vers α quand l'indice k croît indéfiniment. Formons l'expression

$$S_k=\frac{c_0(\rho_k,\tau_k)s_0+c_1(\rho_k,\tau_k)s_1+\ldots+c_k(\rho_k,\tau_k)s_k}{V(\rho_k,\tau_k)}.$$

Je dis que, pour k croissant indéfiniment, cette expression tend vers $F(\theta)$ sur la circonférence $r=1$ et est, par suite, une solution analogue à (8) du problème de Dirichlet dans le cas du cercle. Cela résulte, d'une part, de ce que S_k est, de même que (8), une combinaison linéaire de solutions de la première équation (10); d'autre part, de ce que la limite de S_k, définie comme on vient de le faire, se réduit en outre à l'expression (6) pour $r=1$.

Donc, quoiqu'il n'y ait, bien entendu, qu'une seule fonction harmonique prenant la valeur $F(\theta)$ sur $r=1$ (principe de Dirichlet), nous n'en avons pas moins construit une infinité d'expressions, *dépendant d'une fonction arbitraire quant à leur forme,* pour représenter cette unique solution.

Il y a là une raison curieuse et que je crois nouvelle de montrer une fois de plus que la présence d'une fonction arbitraire dans une solution d'une équation aux dérivées partielles ne permet nullement de conclure quoi que ce soit quant à la généralité de cette solution. La solution peut être *invariante* par rapport à la fonction arbitraire qu'elle contient.

Dans cet ordre d'idées, M. Fejér paraît encore préparer des travaux importants. Dans sa Note *Sur le développement d'une fonction arbi-*

traire suivant les fonctions de Laplace (*Comptes rendus,* 3 février 1908), il envisage l'unique solution du problème de Dirichlet dans le cas de la sphère et construit diverses expressions de cette solution, lesquelles, coïncidant à la surface de la sphère, doivent coïncider partout.

II. — Prolongement analytique.

6. Les résultats obtenus jusqu'ici, s'ils permettent de remplacer une expression tendant vers une certaine limite par une infinité d'autres tendant vers la même limite, et même, dans certains cas, une limite *indéterminée* par une limite déterminée, ne permettent cependant pas, du moins sous la forme précédente, de construire une expression à limite déterminée en partant d'une autre croissant au delà de toute limite. C'est ainsi que la formule de Cesàro, appliquée à une série entière convergeant dans un cercle taylorien, ne convergeait que dans ce cercle même ou, tout au plus, sur la circonférence le limitant.

Je vais montrer qu'en modifiant convenablement le raisonnement du n° **1**, on peut arriver très simplement à un véritable prolongement analytique qui est celui de M. Mittag-Leffler préparé par les recherches de M. Borel.

Je ne considère, pour plus de simplicité, qu'une fonction méromorphe $F(x)$ dont les pôles a_1, a_2, a_3, ..., supposés d'abord simples, sont rangés par ordre de modules croissants.

Je suppose que l'origine O est un point régulier et qu'on connaît le développement taylorien valable dans le cercle C_0 décrit de l'origine comme centre avec un rayon au plus égal à $|a_1|$. Soit toujours s_n la somme des $n+1$ premiers termes de ce développement. Enfin soit C_k le cercle de centre O dont le rayon est compris entre $|a_k|$ et $|a_{k+1}|$.

Dans C_k, on a

$$F(x) = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{A_i}{x-a_i} + a_{k0} + a x_{k1} + a_{k2} x^2 + \ldots, \tag{11}$$

ce qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} F(x) = \sum_{i=1}^{i=k} A_i \left[-\frac{1}{a_i} - \frac{x}{a_i^2} - \ldots - \frac{x^n}{a_i^{n+1}} + \frac{x^{n+1}}{a_i^{n+1}(x-a_i)} \right] \\ + a_{k0} + a_{k1} + \ldots + a_{kn} x^n + a_{k(n+1)} x^{n+1} + \ldots \end{aligned}$$

ou encore

$$F(x) = s_n + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{A_i x^{n+1}}{a_i^{n+1}(x-a_i)} + a_{k(n+1)}x^{n+1} + a_{k(n+2)}x^{n+2} + \ldots.$$

Soit maintenant

$$f(\xi) = \gamma_0 + \gamma_1 \xi + \gamma_2 \xi^2 + \ldots$$

une fonction *entière;* je pose $c_n = \gamma_n \xi^n$ et, après avoir multiplié par c_n tous les termes de la formule en x obtenue en dernier lieu, je somme de $n = 0$ à $n = \infty$. Il vient

$$F(x)f(\xi) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n s_n + \sum_{i=1}^{i=k} f\left(\frac{\xi x}{a_i}\right) \frac{A_i x}{a_i(x-a_i)}$$
$$+ \sum_{n=0}^{n=\infty} a_{k(n+1)} x^{n+1} (\gamma_0 + \gamma_1 \xi + \ldots + \gamma_n \xi^n).$$

Finalement on arrive à la *formule fondamentale*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n s_n}{f(\xi)} + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{f\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{f(\xi)} \frac{A_i x}{a_i(x-a_i)}$$
$$+ \sum_{n=0}^{n=\infty} a_{k(n+1)} x^{n+1} \frac{\gamma_0 + \gamma_1 \xi + \ldots + \gamma_n \xi^n}{f(\xi)}.$$

7. *Cas où* $F(x)$ *présente des pôles multiples.* — Étudions ce cas avant de discuter la formule que nous venons d'obtenir. Si $F(x)$ présente des pôles d'ordre m, le sigma de la formule (11) ne porte pas seulement sur des quantités en $(x - a_i)$ à la puissance -1; c'est une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants de $(x - a_i)^{-1}$ et des dérivées d'ordre 1, 2, …, $m - 1$ de cette même expression. En commençant à se représenter les choses de cette façon, on voit alors facilement comment se généralise le calcul précédent. Le sigma médian de la formule fondamentale, au lieu de contenir seulement le rapport de $f\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)$ à $f(\xi)$, contient de manière linéaire et homogène les m rap-

ports

$$(12) \qquad \frac{f\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{f(\xi)}, \quad \frac{f^{(1)}\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{f(\xi)}, \quad \dots, \quad \frac{f^{(m-1)}\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{f(\xi)},$$

qui, en général, sont distincts. Il n'y a même qu'un seul cas où ils sont rigoureusement confondus : c'est celui de $f(\xi) = e^{\xi}$.

8. J'ai déjà publié des démonstrations de la formule fondamentale du n° **6**, démonstrations fondées sur la considération préliminaire d'une intégrale curviligne double (*Bulletin des Sciences mathématiques,* juin 1907 et juillet 1908). On trouvera encore une autre démonstration de ladite formule dans un article de M. A. Costabel, où l'intégrale double est étudiée en renversant l'ordre des intégrations (*Enseignement mathématique,* septembre 1908). Mon but était ici de retrouver cette formule sans rien emprunter à la notion d'intégrale curviligne.

Il est facile de voir que cette formule fondamentale équivaut au théorème général de M. Mittag-Leffler sur la représentation des fonctions méromorphes. Elle doit être valable pour toutes les valeurs de x, car le cercle C_k peut être aussi grand qu'on veut.

Le premier sigma converge quels que soient ξ et x, ainsi que M. Mittag-Leffler l'a démontré très simplement, en observant que $\sqrt[n]{c_n s_n}$ se comporte comme $\sqrt[n]{c_n}$ pour n croissant indéfiniment (5e Note : *Acta mathematica,* t. XXIX, p. 167).

Le troisième sigma n'existe pas si $F(x)$ se réduit à une fraction rationnelle; dans le cas général, on peut toujours le faire disparaître en faisant croître indéfiniment $|\xi|$ dans une direction où $|f(\xi)|$ croît aussi indéfiniment.

Dans ces conditions, on a, pour représenter $F(x)$, une formule qui est une extension obtenue sans grande peine de la formule insuffisante (11) qui est celle de Cauchy. Mais j'abandonne ces remarques pour revenir au prolongement analytique proprement dit.

9. La formule fondamentale du n° **6** se réduit à

$$(13) \qquad F(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n s_n}{f(\xi)},$$

si l'on s'arrange à annuler toujours le premier des rapports (12) [cas où $F(x)$ n'a que des pôles simples] ou tous ces rapports [cas des pôles d'ordre m]. Elle permet alors une représentation de $F(x)$ au moyen des *polynomes tayloriens* s_n, ainsi nommés parce qu'on peut les prendre immédiatement dans le développement taylorien de $F(x)$ valable au voisinage de l'origine. Quant aux valeurs de x pour lesquelles (13) est valable, elles sont déterminées par les conditions obtenues en annulant les rapports (12).

Je vais rappeler brièvement quelques résultats connus en y adjoignant des résultats nouveaux.

a. $f(\xi) = e^{\xi}$. — Ce cas est celui de M. Borel, x étant enfermé dans un certain *polygone de sommabilité*. J'ai redonné de ce fait une démonstration extrêmement brève (*Bulletin des Sciences mathématiques*, juin 1907). Cette méthode n'est pas de nature à donner, en général, un prolongement analytique bien considérable, car, comme le reconnaît M. Borel lui-même, le polygone de sommabilité peut être à peine plus étendu que le cercle taylorien; mais, d'autre part, elle jouit de propriétés simples qui ne paraissent pouvoir appartenir à aucune autre méthode, du moins *avec le même degré de simplicité*. Tout d'abord, les rapports (12) sont confondus et, par suite, tous sont nuls si le premier l'est. Donc la formule de M. Borel est aussi bien valable pour $F(x)$ possédant des pôles multiples quel que soit leur ordre. Il s'ensuit immédiatement que *la formule est dérivable indéfiniment*, les singularités polaires de $F(x)$ se reproduisant dans ses dérivées avec une simple augmentation d'ordre.

b. $f(\xi) = e^{\xi^p}$. — Ce cas a encore été étudié par M. Borel. La région de sommabilité est limitée par certaines courbes (*Leçons sur les séries divergentes*, p. 132). La méthode de ce Mémoire redonne, en quelques lignes, l'équation de ces courbes (A. Costabel, *Enseignement mathématique*, septembre 1908).

c. $f(\xi) = e^{e^{\xi}}$. — *Voir* A. Costabel, *loc. cit.*

d. $f(\xi)$ est une fonction entière construite tout spécialement pour que la formule (13) soit valable dans tout le plan. Le grand honneur d'avoir construit de telles fonctions appartient à M. Mittag-Leffler (5e Note, *loc. cit.*). Le grand géomètre a d'ailleurs insisté sur ce

point dans sa très belle conférence sur la représentation des fonctions analytiques faite au dernier Congrès international de Mathématiques (Rome, avril 1908). La fonction $f(\xi)$ prend ici, dans un angle ayant son sommet à l'origine et aussi aigu qu'on le veut, des valeurs incomparablement plus grandes que partout ailleurs. Si l'ouverture de l'angle décroît indéfiniment et si ξ va à l'infini sans en sortir, le rapport de $f\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)$ à $f(\xi)$ tend vres zéro quand x et a_i sont d'arguments différents ou de même argument avec $|x| < a_i$. La formule (13) a donc lieu pour x dans tout le plan, sauf sur les rayons d'une étoile.

e. $f(\xi) = \sigma\xi$. — L'emploi de la fonction σ, que Weierstrass place à la base de sa théorie des fonctions elliptiques, m'a fourni des résultats très différents des précédents mais cependant fort intéressants (*Bulletin des Sciences mathématiques*, juillet 1908). On peut imaginer qu'on ne considère pour ξ et x que des valeurs en nombre infini *mais discontinues*, de telle sorte que $\frac{\xi x}{a_i}$ coïncide toujours avec un zéro de σ. Alors le premier rapport (12) est nul si $\sigma\xi$ ne l'est pas; ces rapports seront même tous nuls si l'on remplace σ, qui n'a que des zéros simples, par sa puissance $m^{\text{ième}}$ qui aura évidemment des zéros d'ordre m. On a ainsi de nouvelles formules valables, non pas lorsque x est dans l'ensemble continu de toutes les valeurs complexes, mais lorsque cette variable est dans de certains ensembles dénombrables dont les éléments peuvent pourtant être répandus dans tout le plan.

10. On voit, par cet exposé rapide, comment le prolongement analytique d'une fonction méromorphe est intimement lié à son développement en série de fractions rationnelles. C'est surtout ce point qui m'a semblé intéressant, la formule fondamentale du n° **6** étant, au fond, d'origine très élémentaire et à peine plus difficile à établir que celle du n° **1**.

Le problème du prolongement d'une branche d'une fonction *quelconque*, si l'on consent d'abord à sacrifier un peu sa généralité, paraît promettre en retour bien des cas particuliers simples et élégants; j'espère l'avoir montré pour les fonctions méromorphes.

PRIX WOLFSKEHL.

En vertu des pouvoirs que nous a donnés M. le Dr Paul Wolfskehl, décédé à Darmstadt, nous fondons par les présentes un prix de 100000 marks sous le nom *Einhunderttausend Mark*, qui sera délivré à celui qui donnera le premier une démonstration du grand théorème de Fermat.

Dans son testament, M. le Dr Wolfskehl observe que Fermat (*Œuvres*, Paris, 1891, t. I, p. 291, observ. II) affirme *mutatis mutantis* que l'équation $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ n'a pas de solutions entières pour tous les exposants λ qui sont des nombres premiers impairs. Il y a lieu de démontrer ce théorème soit en général, suivant les idées de Fermat, soit en particulier, conformément aux recherches de Kummer (*Journal de Crelle*, t. 40, p. 130 et suiv.; *Abh. der Akad. d. Wiss.*, Berlin, 1857), pour tous les exposants λ pour lesquels il a, en somme, une valeur. Pour plus amples renseignements, consulter : Hilbert, *Theorie der algebraischen Zahlkörper* (*Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, t. IV, 1894-1895, § 172-173, et *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. I, Teil, 2, *Arithmetik und Algebra*, 1900-1904, IC, 4 *b*, p. 713).

La fondation du prix a lieu sous les conditions suivantes :

La *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen* décidera en toute liberté à qui le prix doit être attribué. Elle refuse d'accepter tout *manuscrit* ayant pour objet de concourir à l'obtention du prix du théorème de Fermat : elle ne prendra en considération que les Mémoires mathématiques qui auront paru sous forme de monographie dans des journaux periodiques ou qui sont en vente sous forme de Volumes, en librairie. La Société prie les auteurs de pareils Mémoires de lui en adresser au moins cinq exemplaires imprimés.

Seront exclus du Concours les travaux qui seraient publiés dans une langue qui ne serait pas comprise des savants spécialistes désignés pour le jugement. Les auteurs de pareils travaux pourront y substituer des traductions dont la fidélité sera certaine.

La Société décline toute responsabilite au sujet du nonexamen de travaux dont elle n'aurait pas eu connaissance, ainsi que des erreurs qui pourraient résulter du fait que le véritable auteur du travail ou d'une partie du travail était inconnu de la Société.

Elle se réserve toute liberté de décision pour le cas où plusieurs personnes s'occuperaient de la solution de la question ou pour le cas où cette solution résulterait de travaux combinés de plusieurs savants, en particulier en ce qui concerne le partage du prix, à son gré.

L'attribution du prix par la Société aura lieu au plus tôt deux ans après la publication du Memoire à couronner. Cet intervalle de temps a pour but de permettre aux mathématiciens allemands et étrangers d'emettre leur opinion au sujet de l'exactitude de la solution publiée.

Le Concours pour le prix Wolfskehl est ouvert à la date de ce jour aux conditions enoncees ci-dessus.

Göttingen, 27 juin 1908.

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Formules relatives aux minima des classes de formes quadratiques, binaires et positives;

Par M. G. HUMBERT.

1. Dans un Mémoire publié au Tome III (6e série, année 1907) de ce journal, j'ai rencontré des formules où figurent les minima des classes de même déterminant : le présent travail a pour but de compléter ces résultats; on se bornera à six relations, qui expriment certaines sommes algébriques simples de minima à l'aide de fonctions numériques liées aux diviseurs d'un nombre.

2. On sait qu'on appelle *minima* d'une classe de formes quadratiques binaires et positives les trois plus petits entiers représentables *proprement* par les formes de la classe. La réduite de cette classe étant (a, b, c), les trois minima sont a, c, $a+c-2|b|$.

Dans tout ce qui suit, nous ne considérons que des classes *de l'ordre propre* (primitives ou non), c'est-à-dire dont les formes n'ont pas leurs deux coefficients extrêmes pairs à la fois; dès lors, parmi les trois minima, deux sont impairs, un est pair.

Nous désignerons toujours par m_1 et m_2 $(m_1 \leqq m_2)$ les deux minima impairs, par m le minimum pair d'une même classe; m_1 sera dit le *premier* minimum impair, m_2 le *second*.

Soit Δ le discriminant de la réduite (a, b, c); on a

$$\Delta = ac - b^2,$$

et, si l'on pose $a+c-2|b| = d$, cette relation s'écrit

$$\begin{aligned} 4\Delta &= 4ac - (a+c-d)^2 \\ &= -a^2 - c^2 - d^2 + 2ac + 2ad + 2cd; \end{aligned}$$

par suite on a, entre le discriminant et les trois minima d'une même classe, la relation

$$(1)\qquad 4\Delta = -m_1^2 - m_2^2 - m^2 + 2m_1m_2 + 2mm_1 + 2mm_2.$$

Les inégalités classiques de la réduction donnent $a \leqq c \leqq d$, et comme, en vertu de la définition de d, on a

$$d \leqq a + c,$$

on en conclut qu'un quelconque des minima est au plus égal à la somme des deux autres.

Réciproquement, on établit de suite que, étant donnés trois entiers positifs, m_1, m_2, m, les deux premiers impairs, le troisième pair, les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces trois nombres soient les minima d'une classe de discriminant donné Δ sont : 1° que la relation (1) ait lieu; 2° que chacun des trois nombres soit au plus égal à la somme des deux autres.

Il y a, en général, *deux* classes ayant pour minima trois nombres donnés; ce sont deux classes *opposées*, c'est-à-dire dont les réduites sont (a, b, c) et $(a, -b, +c)$. Toutefois, ces deux classes coïncident si elles sont ambiguës; pour qu'il en soit ainsi, en vertu des conditions classiques auxquelles satisfait une réduite ambiguë, il faut et il suffit que deux des minima soient égaux, *ou* que l'un soit égal à la somme des deux autres.

Par suite, la classe de minima m_1, m_2, m sera ambiguë si *l'une ou l'autre* des égalités suivantes est vérifiée :

$$(2)\qquad m_1 = m_2, \qquad m_2 = m + m_1, \qquad m = m_1 + m_2,$$

et réciproquement; en ces cas, il n'y a qu'une classe admettant m_1, m_2, m pour minima.

5. La relation (1) conduit aisément aux conséquences qui suivent :

Si $\Delta \equiv 1 \pmod 4$,	on a	$m \equiv 2$,	$m_2 - m_1 \equiv 0$	$\pmod 4$.
» $\Delta \equiv 2$	»	$m \equiv 2$,	$m_2 - m_1 \equiv 2$	
» $\Delta \equiv 3$	»	$m \equiv 0$,	$m_2 - m_1 \equiv 2$	
» $\Delta \equiv 0$	»	$m \equiv 0$,	$m_2 - m_1 \equiv 0$	

Pour $\Delta = 4N + 1$, on reconnaît de même que

$$m - 2m_1 \equiv 4N \pmod{8}.$$

4. Cela posé, soit $\Delta \equiv 1$ ou $2 \pmod{4}$; m_1, m_2, m étant les minima d'une classe de discriminant Δ, je dis qu'il en est de même des nombres (positifs) m'_1, m'_2, m' définis par

$$(3) \qquad m'_1 = \frac{1}{2}m, \qquad m'_2 = m_1 + m_2 - \frac{1}{2}m, \qquad m' = 2m_1.$$

En effet : 1° on vérifie de suite que la relation (1) est satisfaite pour m'_1, m'_2, m' si elle l'est pour m_1, m_2, m; 2° par ce qui précède, m'_1 et m'_2 sont impairs, et $m'_1 \leqq m'_2$; m' est pair, et, en vertu des inégalités entre m_1, m_2, m, chacun des m'_1, m'_2, m' est au plus égal à la somme des deux autres.

Observons enfin que, si la classe de minima m_1, m_2, m est ambiguë, il en est de même de la classe m'_1, m'_2, m'. Les relations (3) sont d'ailleurs symétriques entre m_1, m_2, m et m'_1, m'_2, m', car on en tire

$$m_1 = \frac{1}{2}m', \qquad m_2 = m'_1 + m'_2 - \frac{1}{2}m', \qquad m = 2m'_1.$$

De là la conséquence suivante :

Formons un Tableau (T) dont chaque ligne comprenne les minima m_1, m_2, m, écrits dans cet ordre, d'une classe de l'ordre propre de discriminant Δ, et qui aura dès lors autant de lignes qu'il y a de classes, primitives ou non, de ce discriminant. Formons ensuite un Tableau (T′), dont chaque ligne comprenne les nombres m'_1, m'_2, m' écrits dans cet ordre, et déduits par (3) des nombres de chaque ligne du Tableau (T) : les deux Tableaux (T) et (T′) seront les mêmes, *à l'ordre près des lignes* [1].

On en déduit, par exemple, que la somme des minima pairs des classes (de l'ordre propre), de discriminant $4N + 1$ ou $4N + 2$, est égale au double de celle de leurs premiers minima impairs, etc.

---

[1] Il serait inexact d'énoncer ce résultat en disant que les classes de discriminant Δ se répartissent en couples de deux, les minima des classes d'un couple étant m_1, m_2, m et m'_1, m'_2, m', car les deux systèmes de minima peuvent coïncider. (Il suffit pour cela que $m = 2m_1$.)

5. Si $\Delta \equiv 3 \pmod 4$, les nombres m'_1, m'_2, m' définis par (3) sont tous pairs, et seraient les minima d'une classe de l'ordre *impropre* de discriminant Δ. On en déduirait aisément des conséquences indiquées déjà dans le Mémoire cité ([1]).

6. Soient enfin $\Delta \equiv 0 \pmod 4$, $\Delta = 4\mathrm{N}$. Désignons par m_1, m_2, m les minima d'une classe quelconque de discriminant N; considérons les deux systèmes de nombres définis par

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{ll} m'_1 = m_1, & m''_1 = m_2, \\ m'_2 = 2m + 2m_2 - m_1, & m''_2 = 2m + 2m_1 - m_2, \\ m' = 2m + 2m_2 - 2|m_2 - m|, & m'' = 2m + 2m_1 - 2|m_1 - m|. \end{array}\right.$$

Les nombres m'_1, m'_2, m''_1, m''_2 sont impairs, et $m'_1 \leqq m'_2$, $m''_1 \leqq m''_2$; enfin m' et m'' sont pairs. On vérifie comme plus haut que m'_1, m'_2, m' et m''_1, m''_2, m'' sont respectivement les minima d'une classe de discriminant 4N.

De cette manière, à une classe de discriminant N [plus simplement à une classe (N)] correspondent deux classes (4N); mais il faut préciser ceci.

En premier lieu, si la classe (N) n'est pas ambiguë, on reconnaît de suite que les deux classes (4N) sont distinctes et qu'aucune n'est ambiguë.

Si la classe (N) est ambiguë, divers cas sont à examiner :

1° On a $m_2 = m_1 + m$ ou $m = m_1 + m_2$; alors les deux classes (4N) sont distinctes et ambiguës toutes deux.

2° On a $m_1 = m_2$; alors les deux classes (4N) ont les mêmes minima, mais ne sont ambiguës que si $m = 2m_1$.

Enfin, on vérifie facilement que deux systèmes distincts m_1, m_2, m conduisent, pour les m'_1, m'_2, m' et m''_1, m''_2, m'', à des systèmes distincts, c'est-à-dire qu'une même classe (4N) ne peut correspondre à deux classes distinctes (N).

Il résulte de là, si l'on tient compte de ce que deux classes (opposées) répondent aux mêmes minima, sauf le cas des ambiguës, qu'à une

---

([1]) Ce journal, 6e série, t. III, nos 52-53.

classe (N) répondent toujours deux classes (4N) et que toutes les classes (4N) ainsi obtenues sont distinctes : il n'y a qu'un cas d'exception, c'est celui où l'on a à la fois $m_1 = m_2$ et $m = 2m_1$; la classe (N) a alors pour réduite la forme $m_1(x^2+y^2)$, et il ne lui correspond *qu'une seule* classe (4N), à savoir $m_1(x^2+4y^2)$.

D'autre part, on sait *a priori* que le nombre des classes (4N) est double [1] de celui des classes (N), en ne comptant que pour $\frac{1}{2}$ la classe $m_1(x^2+y^2)$, si elle existe, c'est-à-dire si N est un carré impair.

Par suite, les formules (4) donnent, d'une manière générale, les minima des classes (4N) en fonction de ceux des classes (N).

On en déduit des conséquences faciles; par exemple, la somme des minima impairs des classes (4N) est égale à deux fois celle des minima impairs des classes (N), plus quatre fois celle des minima pairs de celles-ci; mais il faut compter pour $\frac{1}{2}$, si N est un carré impair, la classe $\sqrt{N}(x^2+y^2)$, c'est-à-dire prendre pour ses minima $\frac{1}{2}\sqrt{N}$, $\frac{1}{2}\sqrt{N}$, $\sqrt{N}$ au lieu de $\sqrt{N}$, $\sqrt{N}$, $2\sqrt{N}$.

7. Je reviens maintenant aux résultats de mon dernier Mémoire (cité plus haut).

En appelant F(N) le nombre des classes (primitives ou non) de l'ordre propre et de discriminant N, et $F_1(N)$ le nombre analogue pour l'ordre impropre, et en posant

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= \sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\nu+\frac{3}{4}} F(4\nu+3), \\ B &= 2\sum_{1}^{\infty} q^{\nu} F(\nu) = \sum_{1}^{\infty} q^{\nu} F(4\nu), \\ C &= \sum_{0}^{\infty} q^{\nu}[F(\nu) - 3F_1(\nu)], \end{aligned}\right.$$

---

[1] Cela résulterait d'ailleurs de ce qui précède; il suffirait d'observer que, par (4), à une classe (4N) donnée répond *une et une seule* classe (N).

avec (¹) $F(o) = o$, $F_1(o) = -\frac{1}{12}$, j'ai obtenu (nos **57** à **62**) les expressions des quantités

$$A\theta^2,\quad A\eta_1\theta,\quad B\theta^2,\quad B\theta\theta_1,\quad C\eta_1^2,\quad C\eta_1\theta_1,$$

sous les formes suivantes :

$$(6)\qquad A\theta^2 = \frac{1}{2}\sum_{N=0}^{\infty}(-1)^N q^{N+\frac{3}{4}}\sum(m_2 - m_1)(-1)^{\frac{1}{2}(m_1-1)};$$

la seconde somme s'étend aux minima des classes (de l'ordre propre) de discriminant $4N+3$;

$$(7)\qquad A\eta_1\theta = \frac{1}{2}\sum_{N=1}^{\infty} q^N \sum_{4N} m(-1)^{\frac{m_1+m_2+2}{4}},$$

la somme $\sum_{4N}$ portant sur les minima des classes (de l'ordre propre) de discriminant $4N$. De même

$$(8)\qquad B\theta^2 = \frac{1}{2}\sum_{N=1}^{\infty}(-1)^N q^N \sum_{4N}(m_1 + m_2 - m)(-1)^{\frac{1}{4}(m_1+m_2-m+2)};$$

$$(9)\qquad B\theta\theta_1 = \sum_{N=1}^{\infty} q^N \sum_{4N} m_1(-1)^{\frac{1}{4}(m_1+m_2+2)};$$

$$(10)\qquad C\eta_1^2 = -\frac{1}{2}\sum_{N=0}^{\infty} q^{N+\frac{1}{2}} \sum_{4N+2}(m_1 + m_2 - m)(-1)^{\frac{m-2}{4}};$$

$$(11)\qquad C\eta_1\theta_1 = \sum_{N=0}^{\infty} q^{N+\frac{1}{4}} \sum_{4N+1} m_1(-1)^{\frac{m-2}{4}}.$$

8. A ces formules j'en ajouterai deux autres.

En partant du développement de $\frac{1}{4}\eta_1^2\theta_1 H^2 H_1 : \Theta^2$ (*loc. cit.*, n° **8**), en le multipliant par celui de $\eta_1\theta_1\Theta : H_1$, et égalant dans les deux membres, développés en séries de Fourier, les termes indépendants, on obtient l'expression de $A\eta_1^2 - B\eta_1\theta_1$; on trouve de même celle de

(¹) La classe $m_1(x^2+y^2)$, où m_1 est entier impair, compte seulement pour $\frac{1}{2}$ dans $F(m_1^2)$.

$A\eta_1\theta_1 - B\theta_1^2$, et l'on a ainsi :

(12) $$\eta_1(A\eta_1 - B\theta_1) = \frac{1}{2}\sum_{N=1}^{\infty} q^{N+\frac{1}{4}} \sum_{4N+1} (m_2 - m_1)(-1)^{\frac{m+2}{4}};$$

(13) $$\theta_1(A\eta_1 - B\theta_1) = \frac{1}{2}\sum_{N=1}^{\infty} q^{N} \sum_{4N} (m_1 + m_2 - m)(-1)^{\frac{m_1-1}{2}}.$$

Dans les seconds membres des formules (11) et (12), si $4N+1$ est un carré m_1^2, les termes qui correspondent à la classe $m_1(x^2+y^2)$ doivent être divisés par 2.

9. D'autre part, on connaît (*loc. cit.*, n° 59) les expressions de $A\theta$, $B\theta$ et $C\eta_1$:

(14) $$\left\{\begin{aligned} A\theta &= \sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\nu+\frac{3}{4}}(-1)^{\nu}\psi(4\nu+3), \\ B\theta &= 2\sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu}\omega(\nu), \\ C\eta_1 &= \sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu+\frac{1}{4}}\psi(4\nu+1). \end{aligned}\right.$$

Dans ces formules, $\psi(n)$ est la somme des diviseurs de n inférieurs à $\sqrt{n}$; toutefois, si n est carré, on ajoutera le terme $\frac{1}{2}\sqrt{n}$.

De même, $\omega(n)$ est la somme $\sum d(-1)^{\frac{d+d_1}{2}+1}$ étendue à toutes les décompositions en facteurs $n = dd_1$, où d et d_1 sont de *même parité* et $d < d_1$. Toutefois, si n est carré, $\omega(n)$ comprendra en outre le terme $\frac{1}{2}\sqrt{n}(-1)^{\sqrt{n}+1}$.

Enfin, désignons par $\chi(n)$ la somme $\sum \delta(-1)^{\delta+\delta_1}$ étendue aux décompositions $n = \delta\delta_1$, avec $\delta < \delta_1$ $\Big($en ajoutant en outre, si n est carré, le terme $\frac{1}{2}\sqrt{n}\Big)$; on aura de même

(15) $$A\eta_1 - B\theta_1 = 2\sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu}\chi(\nu).$$

On peut observer que $\chi(n) = \psi(n)$, pour n impair, et

$\chi(n) = -\psi(n)$ pour $n \equiv 2 \pmod 4$. De même on a :

$$
\begin{array}{lll}
\text{pour} & n \equiv 2 \pmod 4, & \omega(n) = 0; \\
\text{»} & n \equiv 3 \pmod 4, & \omega(n) = -\psi(n); \\
\text{»} & n \equiv 1 \pmod 4, & \omega(n) = \psi(n); \\
\text{»} & n \equiv 4 \pmod 8, & \omega(n) = -2\psi\left(\frac{n}{4}\right); \\
\text{»} & n \equiv 0 \pmod 8, & \omega(n) = -2\chi(n),
\end{array}
$$

de sorte que $\omega(n)$ se ramène *toujours* aux fonctions ψ et χ.

10. En portant les valeurs de $A\theta$, $B\theta$, $C\eta_1$, $A\eta_1 - B\theta_1$ dans les formules (6) à (13), et égalant dans les deux membres nouveaux les coefficients des mêmes puissances de q, on obtient les huit formules suivantes, dont les deux premières se trouvent dans mon précédent Mémoire (n[os] **59** et **60**) :

$$(16) \quad \sum_{4N+3} (m_2 - m_1)(-1)^{\frac{1}{2}(m_1 - 1)} = 2 \sum_{x \gtreqless 0} \psi(4N + 3 - 4x^2);$$

$$(17) \quad \sum_{4N} m(-1)^{\frac{1}{4}(m_1 + m_2 + 2)} = 2(-1)^{N+1} \sum_{x \gtreqless 0} \psi[4N - (2x+1)^2];$$

$$(18) \quad \sum_{4N} (m_1 + m_2 - m)(-1)^{\frac{1}{4}(m_1 + m_2 - m + 2)} = 4(-1)^N \sum_{x \gtreqless 0} (-1)^x \omega(N - x^2);$$

$$(19) \quad \sum_{4N} m_1(-1)^{\frac{1}{4}(m_1 + m_2 + 2)} = 2 \sum_{x \gtreqless 0} \omega(N - x^2);$$

$$(20) \quad \sum_{4N+2} (m_1 + m_2 - m)(-1)^{\frac{m-2}{4}} = 2 \sum_{x \gtreqless 0} \psi[4N + 2 - (2x+1)^2];$$

$$(21) \quad \sum_{4N+1} m_1(-1)^{\frac{m-2}{4}} = \sum_{x \gtreqless 0} \psi(4N + 1 - 4x^2);$$

$$(22) \quad \sum_{4N+1} (m_2 - m_1)(-1)^{\frac{m-2}{4}} = -4 \sum_{x \gtreqless 0} \chi\left[\frac{4N + 1 - (2x+1)^2}{4}\right];$$

$$(23) \quad \sum_{4N} (m_1 + m_2 - m)(-1)^{\frac{1}{2}(m_1 - 1)} = 4 \sum_{x \gtreqless 0} \chi(N - x^2).$$

Aux premiers membres, l'indice de chaque $\sum$ indique à quelles classes s'étend la somme correspondante; ainsi $\sum_{4N}$ est une somme étendue aux minima des classes (de l'ordre propre) de discriminant $4N$.

Aux seconds membres, les sommes portent sur les valeurs entières de x, *telles que la quantité sous les signes* ψ, χ, ω *soit positive*.

Simplifions maintenant ces formules, qui vont se réduire à *six*.

11. Partons de la formule (19). Au premier membre figure la somme

$$\sum_{4N} m_1(-1)^{\frac{1}{4}(m_1+m_2+2)};$$

en tenant compte des formules (4), on la ramène à porter sur les classes (N), et l'on trouve ainsi pour sa valeur

$$\sum_{N}\left[m_1(-1)^{\frac{1}{2}(m+m_2+1)}+m_2(-1)^{\frac{1}{2}(m+m_1+1)}\right].$$

Je dis que cette somme est égale à

$$-(-1)^N\sum_N\left[m_1\left(\frac{-1}{m_1}\right)+m_2\left(\frac{-1}{m_2}\right)\right].$$

Il suffit de prouver pour cela que $m+m_2-m_1\equiv 2 \pmod 4$ si N est impair, et $\equiv 0 \pmod 4$ si N est pair; or c'est ce qui résulte immédiatement du n° **5** du présent Mémoire.

On peut donc écrire, *en désignant par* m' *un quelconque des deux nombres* m_1 *et* m_2, la formule très simple

$$(24)\qquad \sum_N m'\left(\frac{-1}{m'}\right)=2(-1)^{N+1}\sum_{x\gtreqless 0}\omega(N-x^2).$$

Cette formule, équivalente à (19), comprend (16) comme on le reconnaît de suite, en s'appuyant sur les propriétés (n° **9**) de $\omega(n)$. Elle comprend également (20), car, en vertu du n° **4**, on a

$$\sum_{4N+2}(m_1+m_2-m)(-1)^{\frac{m-2}{4}}=\sum_{4N+2}(m_2-m_1)(-1)^{\frac{m_1-1}{2}},$$

ce qui, par le nº 5, est

$$-\sum_{4N+2} m'\left(\frac{-1}{m'}\right);$$

d'autre part (nº 9), $\omega(4N+2-4x^2)$ est nul, et

$$\psi[4N+2-(2x+1)^2] = \omega[4N+2-(2x+1)^2].$$

12. De même, en partant de (23), et passant des classes (4N) aux classes (N), on trouve

$$\sum_{N} |m_2 - m|\left(\frac{-1}{m_1}\right) + |m_1 - m|\left(\frac{-1}{m_2}\right) = 2\sum_{x \gtreqless 0} \chi(N - x^2).$$

D'après le nº 5, les symboles $\left(\frac{-1}{m_1}\right)$ et $\left(\frac{-1}{m_2}\right)$ sont égaux pour $N \equiv 1$ ou $0 \pmod 4$; ils sont de signes contraires pour $N \equiv 2$ ou $3 \pmod 4$.

Donc on a, d'une manière générale,

$$\sum_{N} |m_1 - m|\left(\frac{-1}{m_1}\right) + |m_2 - m|\left(\frac{-1}{m_2}\right) = 2(-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \sum_{x \gtreqless 0} \chi(N - x^2),$$

ou, plus simplement, *m′ ayant le même sens qu'au nº* **11**,

$$(25) \qquad \sum_{N} |m' - m|\left(\frac{-1}{m'}\right) = 2(-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \sum_{x \gtreqless 0} \chi(N - x^2).$$

La formule (18) donne de même sans difficulté

$$(26) \qquad \sum_{N} |m' - m|\left(\frac{-1}{m' - m}\right) = 2(-1)^{N+1} \sum_{x \gtreqless 0} (-1)^x \omega(N - x^2).$$

Et enfin la formule (17) conduit à

$$(27) \qquad \sum_{N} [(m' + m) - |m' - m|]\left(\frac{-1}{m'}\right) = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \sum_{x \gtreqless 0} \psi[4N - (2x+1)^2].$$

13. *Conclusions.* — Les quatre formules (24), (25), (26) et (27)

donnent ainsi les expressions des quatre sommes

$$\sum_{N} m'\left(\frac{-1}{m'}\right); \quad \sum_{N} |m' - m|\left(\frac{-1}{m'}\right);$$

$$\sum_{N} |m' - m|\left(\frac{-1}{m' - m}\right); \quad \sum_{N} m\left(\frac{-1}{m'}\right).$$

Cette dernière a pour expression

$$\sum_{N} m\left(\frac{-1}{m'}\right) = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}\left[\sum_{x \gtreqless 0} \psi[4N - (2x+1)^2] + 2\sum_{x \gtreqless 0} \chi(N - x^2)\right]$$
$$+ 2(-1)^N \sum_{x \gtreqless 0} \omega(N - x^2).$$

Ainsi, les quatre sommes algébriques de minima désignées, étendues à toutes les classes (de l'ordre propre) de discriminant N, *s'expriment à l'aide des* deux *seules fonctions numériques* $\omega(n)$ *et* $\chi(n)$, puisque $\psi(2n+1)$ est égal à $\chi(2n+1)$.

D'après le n° **6**, et en vertu du passage des classes $(4N)$ aux classes (N), si N est un carré impair, les termes qui, dans les premiers membres de (24) à (27), répondent à la classe $\sqrt{N}(x^2 + y^2)$ doivent être divisés par 2.

14. *Il reste en outre les deux formules* (21) *et* (22), qui ne rentrent pas dans les quatre précédentes et qui s'écrivent (n^{os} **4** et **5**)

$$(28) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{4N+1} m_1\left(\frac{-1}{m_1}\right) = \sum \frac{1}{2} m \left(\frac{-1}{\frac{1}{2}m}\right) = (-1)^N \sum_{x \gtreqless 0} \psi(4N + 1 - 4x^2), \\ \displaystyle\sum_{4N+1} m_2\left(\frac{-1}{m_2}\right) - \sum m_1\left(\frac{-1}{m_1}\right) = -4(-1)^N \sum_{x \gtreqless 0} \chi\left[\frac{4N + 1 - (2x+1)^2}{4}\right]. \end{cases}$$

Par suite, on a l'expression de chacune des trois sommes

$$\sum m_1\left(\frac{-1}{m_1}\right); \quad \sum m_2\left(\frac{-1}{m_2}\right); \quad \sum \frac{1}{2} m \left(\frac{-1}{\frac{1}{2}m}\right),$$

pour les classes de discriminant $4N + 1$.

D'après le n° **8**, si $4N+1=m_1^2$, les termes qui, dans les premiers membres de (28), répondent à la classe $m_1(x^2+y^2)$ doivent être divisés par 2.

15. On peut déduire de là quelques propriétés des fonctions numériques ψ, χ, ω.

Par exemple, soit $N=4M+2$; alors les symboles $\left(\frac{-1}{m_1}\right)$ et $\left(\frac{-1}{m_2}\right)$ sont de signes contraires (n° **3**), de sorte que

$$\sum m\left(\frac{-1}{m'}\right)=0;$$

on a, dès lors, par la formule du n° **13**, et par les propriétés de $\omega(n)$ et $\chi(n)$ (n° **9**),

$$\sum_{x \gtreqless 0} \psi[16M+8-(2x+1)^2]=2\sum_{x \gtreqless 0} \psi(4M+2-4x^2).$$

Si $N=4M+3$, $\sum m\left(\frac{-1}{m'}\right)$ est nul pour la même raison, et l'on trouve de même

$$\sum_{x \gtreqless 0} \psi[16M+12-(2x+1)^2]=2\sum_{x \gtreqless 0} \psi[4M+3-(2x+1)^2].$$

Soit maintenant $N=8M+5$; je dis que $\sum m'\left(\frac{-1}{m'}\right)=0$. On a en effet, d'après les n^{os} **3** et **4**,

$$\sum_{N} m_1(-1)^{\frac{1}{2}(m_1-1)}+m_2(-1)^{\frac{1}{2}(m_1-1)}=\sum(m_2+m_1)(-1)^{\frac{1}{2}(m_1-1)},$$

$$=\sum\left(\frac{m}{2}+m_2+m_1-\frac{m}{2}\right)(-1)^{\frac{m-2}{4}}.$$

Mais, par ce qui a été dit au n° **3**,

$$(-1)^{\frac{m-2}{4}}=-(-1)^{\frac{1}{2}(m_1-1)},$$

d'où il résulte

$$\sum(m_2+m_1)(-1)^{\frac{1}{2}(m_1-1)}=-\sum(m_2+m_1)(-1)^{\frac{1}{2}(m_1-1)}=0.$$

La proposition est ainsi établie, et la formule (24) donne dès lors

$$\sum_{x \gtreqless 0} \omega(8M + 5 - x^2) = 0,$$

ce qui s'écrit, en vertu des propriétés de $\omega(n)$ (n° 9),

$$\sum_{x \gtreqless 0} \psi(8M + 5 - 4x^2) = 2 \sum_{x \gtreqless 0} \psi\left[\frac{8M + 5 - (2x+1)^2}{4}\right].$$

16. *Remarque.* — Les formules (24) à (28) rapprochent les sommes de minima qui y figurent, et qu'on peut regarder comme des fonctions numériques du discriminant, d'une autre fonction numérique classique, à savoir le nombre des décompositions d'un entier en sommes de cinq carrés. Seulement, cette dernière fonction s'exprime à l'aide de sommes de diviseurs *complètes,* tandis que nos $\psi(n)$, $\chi(n)$, $\omega(n)$ sont des sommes *incomplètes,* puisqu'elles ne portent que sur les diviseurs inférieurs à $\sqrt{n}$.

On a, par exemple, pour le nombre des décompositions de $4N + 3$ en cinq carrés, en désignant par $\Phi(n)$ la somme *de tous les diviseurs* de n, l'expression

$$20 \sum_{x \gtreqless 0} \Phi(4N + 3 - 4x^2);$$

au contraire, $\psi(n)$ désignant la somme des diviseurs de n inférieurs à $\sqrt{n}$, l'expression $2 \sum_{x \lesseqgtr 0} \psi(4N + 3 - 4x^2)$ est, d'après (16), égale à la somme $-\sum m'\left(\frac{-1}{m'}\right)$, étendue à toutes les classes (ordre propre) de discriminant $4N + 3$.

17. Terminons par des formules d'un type différent, déjà rencontré dans le précédent Mémoire (n° **64**).

Multiplions par η_1 les deux membres de (9); nous avons, au premier membre, $B\eta_1\theta_1\theta$, c'est-à-dire $B\eta'$, qu'on peut calculer en dérivant les deux membres de la troisième formule (5) du Mémoire précédent, et

faisant ensuite $x = 0$. On trouve ainsi

$$B\eta' = \frac{1}{4}\eta_1^5\theta + 2\sum_1^{\infty}(-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}(2m+1)[q^{-1} + 2q^{-4} + \ldots + mq^{-m^2}].$$

Le coefficient de $q^{N+\frac{1}{4}}$ dans le second membre est

$$(29) \qquad \frac{1}{4}(-1)^{N+1}G_{5,1}(4N+1) + \frac{1}{4}\sum(\delta_1^2 - \delta^2)(-1)^{\frac{\delta_1+\delta-2}{4}},$$

$G_{5,1}(4N+1)$ étant le nombre de décompositions de $4N+1$ en six carrés, dont cinq impairs écrits d'abord, et un pair, et la somme s'étendant aux décompositions $4N+1 = \delta\delta_1$, avec $\delta \leqq \delta_1$.

Mais on connaît, par le nombre total de décompositions en six carrés, $G_{5,1}(4N+1) + G_{1,5}(4N+1)$; la formule (Mémoire cité, n° **2**)

$$\eta_1\theta_1\theta^4 = \eta_1\theta_1(\theta_1^4 - \eta_1^4) = \eta_1\theta_1'' - \theta_1\eta_1''$$

donne, si l'on égale les coefficients de $q^{N+\frac{1}{4}}$ dans les deux membres, $G_{1,5}(4N+1) - G_{5,1}(4N+1)$, d'où l'on conclut

$$G_{1,5}(4N+1) = \sum d^2(-1)^{\frac{d-1}{2}} + \sum \Delta^2,$$

$$G_{5,1}(4N+1) = \sum d^2(-1)^{\frac{d-1}{2}} + \sum \Delta^2,$$

d étant un diviseur quelconque réel et positif de $4N+1$, et Δ un diviseur quelconque complexe $\alpha + \beta i$ de $4N+1$, où α est impair et positif et $\beta \gtreqless 0$.

On a ainsi, en (29), le coefficient de $q^{N+\frac{1}{4}}$ dans $B\eta'$; c'est également, par ce qui a été dit, celui de $q^{N+\frac{1}{4}}$ dans le second membre de (9) multiplié par η_1 : explicitant ce dernier coefficient, on obtient, toutes réductions faites, la relation suivante.

Posons, pour abréger, avec la convention du n° **15**,

$$\mathfrak{S}(N) = \sum_N m_1\left(\frac{-1}{m_1}\right);$$

on a

$$(30)\qquad \sum_{x \gtreqless 0} \mathfrak{S}[4N+1-(2x+1)^2] = \frac{1}{2}\sum \delta^2\left(\frac{-1}{\delta}\right) - \frac{1}{4}\sum \Delta^2;$$

au premier membre, la somme porte sur les valeurs entières de x telles que la quantité sous $\mathfrak{S}$ soit positive; au second membre, δ désigne tout diviseur positif de $4N+1$ *inférieur à* $\sqrt{4N+1}$, Δ tout diviseur complexe de $4N+1$, soit $\alpha+\beta i$, tel que α soit impair et positif, β étant $\gtreqless 0$. En opérant de même sur (11), on trouverait, avec les mêmes notations,

$$(31)\qquad \sum_{x \gtreqless 0} \mathfrak{S}(4N+1-4x^2) = \frac{1}{2}\sum \delta^2\left(\frac{-1}{\delta}\right) + \frac{1}{4}\sum \Delta^2;$$

et, par addition membre à membre de (30) et (31),

$$(32)\qquad \sum_{y \gtreqless 0} \mathfrak{S}(4N+1-y^2) = \sum \delta^2\left(\frac{-1}{\delta}\right).$$

Si $4N+1$ est carré, et égal à m_1^2, parmi les diviseurs δ figurera m_1, et les termes $m_1^2\left(\frac{-1}{m_1}\right)$ correspondants, dans les seconds membres de (30), (31), (32), devront être divisés par 2; parmi les Δ figure également m_1, mais le terme m_1^2 correspondant ne devra pas être divisé par 2.

Ainsi, par (32), la fonction numérique $\mathfrak{S}$ satisfait à une relation analogue à celles que, d'après Kronecker, vérifient les nombres de classes; seulement, au second membre, figurent non des diviseurs, mais des carrés de diviseurs.

Il est clair que la fonction qui donne le nombre de décompositions d'un entier en cinq carrés satisfait à une relation du type de (32) (mais où le second membre serait une somme *complète* de carrés de diviseurs), ce qui continue le parallélisme signalé au n° **16**.

Étude sur les probabilités des causes;

PAR M. L. BACHELIER.

Dans la théorie des probabilités des causes et des événements futurs d'après les événements observés, on étudie seulement le cas où deux alternatives sont possibles à chaque épreuve; nous nous proposons d'établir les mêmes théories en supposant que le nombre des alternatives soit quelconque.

Pour employer les mêmes termes que dans mes travaux antérieurs, nous dirons que jusqu'ici on a traité seulement les questions comportant une seule variable, alors que la présente étude est relative au cas où le nombre des variables est quelconque.

Dans la théorie des probabilités des causes, on suppose que toutes les alternatives sont *a priori* également vraisemblables; l'étude actuelle envisage d'autres lois de probabilité et, pour certains problèmes, les résultats sont indépendants de ces lois.

Cette étude, nécessairement fort concise, ne traite pas en particulier le cas d'une seule variable; les questions relatives à ce cas sont exposées dans le Traité de Laplace et dans l'Ouvrage classique de M. H. Poincaré.

La recherche des probabilités des causes (ou probabilités *a posteriori*) exige la connaissance des probabilités des effets (ou probabilités *a priori*). Nous débuterons donc par l'étude des probabilités des effets généralisée au cas de plusieurs variables.

Théorie des épreuves répétées.

1. A chaque épreuve, n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n$ peuvent se produire et s'excluent mutuellement, de

sorte que $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. La probabilité pour que, en μ épreuves, le premier événement se produise m_1 fois, le second m_2 fois, ..., le $n^{\text{ième}}$ m_n fois $(m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \mu)$ est

$$\frac{\mu!}{m_1!\,m_2!\ldots m_n!}\,p_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_n^{m_n}.$$

2. La plus grande probabilité correspond au cas où $m_1 = \mu p_1$, $m_2 = \mu p_2$, ..., $m_n = \mu p_n$.

La valeur moyenne du nombre des arrivées du premier événement est μp_1, celle qui correspond au second événement est μp_2, etc.

Le cas, en quelque sorte normal, est celui pour lequel les événements se produisent proportionnellement à leur probabilité. Les autres cas sont définis par leurs différences à celui-ci.

Nous dirons que les *écarts* sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$ quand l'événement A_1 se sera produit $\mu p_1 + x_1$ fois; l'événement A_2, $\mu p_2 + x_2$ fois, ...; l'événement A_n, $\mu p_n + x_n$ fois $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0)$.

La probabilité pour que les écarts soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en μ épreuves est, d'après la formule précédente,

$$\frac{\mu!}{(\mu p_1 + x_1)!\,(\mu p_2 + x)!\ldots(\mu p_n + x_n)!}\,p_1^{\mu p_1 + x_1}p_2^{\mu p_2 + x_2}\ldots p_n^{\mu p_n + x_n}.$$

3. Dans la question qui précède, les probabilités sont les mêmes à chaque épreuve; on serait conduit, par exemple, à cette question en essayant de résoudre le problème suivant :

Une urne renferme ap_1 boules blanches, ap_2 boules noires, ..., ap_n boules vertes; on tire successivement μ boules de l'urne en replaçant chaque fois dans l'urne la boule extraite; quelle est la probabilité pour obtenir m_1 boules blanches, m_2 boules noires, ..., m_n boules vertes?

Il est intéressant de traiter le problème analogue dans le cas où les boules ne sont pas replacées :

Une urne renferme k_1 boules blanches, k_2 boules noires, ..., k_n boules vertes; on en extrait μ boules (soit ensemble, soit successivement, sans les replacer dans l'urne); la probabilité pour que, sur les μ boules, il y ait m_1 boules blanches, m_2 boules noires, ...,

m_n *boules vertes* $(m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \mu)$ *est*

$$\frac{\mu!}{m_1!\,m_2!\ldots m_n!}\,\frac{k_1!}{(k_1-m_1)!}\,\frac{k_2!}{(k_2-m_2)!}\cdots\frac{k_n!}{(k_n-m_n)!}\,\frac{(k_1+k_2+\ldots+k_n-\mu)!}{(k_1+k_2+\ldots+k_n)!}.$$

4. La valeur moyenne du nombre des boules blanches qui sortent en μ épreuves est $\mu\frac{k_1}{k_1+k_2+\ldots+k_n}\cdot$ La plus grande probabilité lorsque μ est un grand nombre correspond au cas où

$$m_1 = \mu\frac{k_1}{k_1+k_2+\ldots+k_n}, \qquad m_2 = \mu\frac{k_2}{k_1+k_2+\ldots+k_n}, \qquad \ldots.$$

Ces dernières valeurs de m_1, m_2, ... correspondent au cas en quelque sorte normal.

Lorsqu'il sortira de l'urne $\frac{\mu k_1}{k_1+k_2+\ldots+k_n}+x_1$ boules blanches, $\frac{\mu k_2}{k_1+k_2+\ldots+k_n}+x_2$ boules noires, ..., $\frac{\mu k_n}{k_1+k_2+\ldots+k_n}+x_n$ boules vertes, nous dirons que les *écarts* sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On a évidemment $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0)$.

Si l'on pose

$$p_1 = \frac{k_1}{k_1+\ldots+k_n}, \qquad p_2 = \frac{k_2}{k_1+\ldots+k_n}, \qquad \ldots, \qquad p_n = \frac{k_n}{k_1+\ldots+k_n},$$

la probabilité pour que les écarts soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ peut s'écrire

$$\frac{\mu!}{(\mu p_1+x_1)!\,(\mu p_2+x_2)!\ldots(\mu p_n+x_n)!}\,\frac{sp_1!\,sp_2!\ldots sp_n!}{s!}$$
$$\times\frac{(s-\mu)!}{[(s-\mu)p_1-x_1]!\,[(s-\mu)p_2-x_2]!\ldots[(s-\mu)p_n-x_n]!},$$

s désignant la somme $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$.

Formules asymptotiques.

5. Les formules qui précèdent contiennent des factorielles dont le calcul est impraticable; de plus elles ne sont pas expressives, elles ne permettent pas de se former une idée de la variation des probabilités avec le nombre des épreuves; nous les transformerons en leur appli-

quant l'égalité asymptotique de Stirling

$$n! = e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}.$$

Le rapport des deux membres de cette formule tend vers *un* lorsque n augmente et se rapproche beaucoup de l'unité dès que n n'est pas un petit nombre. (Si, par exemple, $n = 20$, le rapport des deux membres est 1,004.)

6. Nous allons appliquer la formule de Stirling au problème des épreuves identiques (n° **2**). La probabilité pour que les écarts soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est

$$\frac{\mu!}{(\mu p_1 + x_1)!\,(\mu p_2 + x_2)!\ldots(\mu p_n + x_n)!}\, p_1^{\mu p_1 + x_1} p_2^{\mu p_2 + x_2} \ldots p_n^{\mu p_n + x_n}.$$

Appliquons la formule de Stirling en supposant μ assez grand pour que $\frac{x_1}{\mu}, \frac{x_2}{\mu}, \cdots$ soient négligeables et $\frac{x_1}{\sqrt{\mu}}, \frac{x_2}{\sqrt{\mu}}, \cdots$ finis. L'expression précédente devient

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi\mu})^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}\left(1 + \frac{x_1}{\mu p_1}\right)^{\mu p_1 + x_1 + \frac{1}{2}}\left(1 + \frac{x_2}{\mu p_2}\right)^{\mu p_2 + x_2 + \frac{1}{2}}\cdots\left(1 + \frac{x_n}{\mu p_n}\right)^{\mu p_n + x_n + \frac{1}{2}}}.$$

On a

$$\log\left(1 + \frac{x_1}{\mu p_1}\right)^{\mu p_1 + x_1 + \frac{1}{2}} = \left(\mu p_1 + x_1 + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x_1}{\mu p_1} - \frac{x_1^2}{2\mu^2 p_1^2} + \frac{x_1^3}{3\mu^3 p_1^3} - \ldots\right),$$

. . . .

$$\log\left(1 + \frac{x_n}{\mu p_n}\right)^{\mu p_n + x_n + \frac{1}{2}} = \left(\mu p_n + x_n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x_n}{\mu p_n} - \frac{x_n^2}{2\mu^2 p_n^2} + \frac{x_n^3}{3\mu^3 p_n^3} - \ldots\right);$$

en additionnant et en supprimant les quantités négligeables en vertu des hypothèses faites, on obtient

$$\log\left[\left(1 + \frac{x_1}{\mu p_1}\right)^{\mu p_1 + x_1 + \frac{1}{2}}\cdots\left(1 + \frac{x_n}{\mu p_n}\right)^{\mu p_n + x_n + \frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{x_1^2}{p_1} + \frac{x_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{p_n}\right);$$

en revenant des logarithmes aux nombres et en portant cette valeur

dans l'expression ci-dessus, elle devient

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu}\left(\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{p_{n-1}}+\frac{x_n^2}{p_n}\right)}}{(\sqrt{2\pi\mu})^{n-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}}.$$

Telle est la formule asymptotique exprimant la probabilité pour que les écarts soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en μ épreuves.

C'est-à-dire la probabilité pour que le premier écart soit compris entre x_1 et $x_1 + dx_1$, le second entre x_2 et $x_2 + dx_2$, ...

En réalité, la formule contient seulement $n-1$ variables x, puisque $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$, et elle devrait être multipliée par un infiniment petit tel que $dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1}$ ou $dx_2 dx_3 \ldots dx_n$ formé par la suppression d'un des éléments de la quantité $dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1} dx_n$.

Afin que la formule reste symétrique, nous nous garderons d'éliminer aucune variable et nous n'écrirons l'infiniment petit que dans les cas où une intégration devra être effectuée.

7. La formule asymptotique

$$\frac{\mu!}{(\mu p_1+x_1)!(\mu p_2+x_2)!\ldots(\mu p_n+x_n)!}p_1^{\mu p_1+x_1}p_2^{\mu p_2+x_2}\ldots p_n^{\mu p_n+x_n}$$
$$=\frac{e^{-\frac{1}{2\mu}\left(\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{p_{n-1}}+\frac{x_n^2}{p_n}\right)}}{(\sqrt{2\pi\mu})^{n-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}},$$

que nous venons de démontrer, nous sera souvent utile; elle suppose que μ est un grand nombre, que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont des nombres positifs ayant pour somme *un* et que $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$.

8. La somme des probabilités de tous les cas possibles est un; on a donc

$$\underline{\iint\cdots\int}_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{2\mu}\left(\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{p_{n-1}}+\frac{x_n^2}{p_n}\right)}}{(\sqrt{2\mu\pi})^{n-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}}dx_1dx_2\ldots dx_{n-1}=1.$$

D'après notre démonstration, la formule est asymptotique, mais on peut démontrer directement qu'elle est vraie quel que soit μ.

9. Considérons le cas d'une seule variable; la probabilité de l'écart x

est donnée par la formule connue

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu pq}},$$

où nous avons écrit p au lieu de p_1 et q au lieu de p_2.

La formule du n° **6** constitue une généralisation de cette dernière; d'autres généralisations ont été exposées dans mon étude sur la *Théorie des probabilités continues* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1906); nous allons cependant reprendre le sujet en nous plaçant à un autre point de vue, en cherchant les probabilités des écarts non plus à la $\mu^{\text{ième}}$ épreuve, mais dans le cours des μ épreuves.

Nous supposerons qu'il y ait une seule variable, mais que les probabilités de l'événement considéré soient différentes à chaque épreuve et qu'elles varient suivant une loi donnée : l'événement aura pour probabilité p_1 à la première épreuve, p_2 à la seconde, ..., p_μ à la $\mu^{\text{ième}}$.

On dit que l'*écart* est x en μ épreuves, quand l'événement s'est produit $p_1 + p_2 + \ldots + p_\mu + x$ fois.

La probabilité pour que l'écart soit x à la $\mu^{\text{ième}}$ épreuve est expérimentée par la formule connue

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\Sigma pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\Sigma pq}};$$

Σpq désigne la quantité $p_1(1-p_1) + p_2(1-p_2) + \ldots + p_\mu(1-p_\mu)$.

L'écart moyen ou valeur moyenne de l'écart considéré en valeur absolue est $\frac{\sqrt{2\Sigma pq}}{\sqrt{\pi}}$.

L'écart probable, c'est-à-dire l'écart qui a égale probabilité d'être ou de ne pas être dépassé, a pour valeur $0,47693\ldots\sqrt{2\Sigma pq}$.

10. Si nous supposons qu'un joueur H perde une somme égale à l'écart, son jeu est équitable.

Il résulte de cette remarque que toutes les formules relatives aux jeux équitables sont applicables à la théorie des écarts dans les épreuves répétées. Ces formules ont été exposées dans mes travaux antérieurs; dans mon Ouvrage sur la *Théorie de la spéculation*, dans mon étude

intitulée *Théorie mathématique du jeu* (*Annales de l'École Normale supérieure,* 1901) et dans mon Mémoire sur la *Théorie des probabilités continues* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 1906).

Cherchons, par exemple, la probabilité pour que, dans le cours des μ épreuves, l'écart m soit atteint, l'écart $-n$ n'ayant jamais été atteint précédemment.

La question revient à chercher la probabilité pour que le joueur H, qui possède la somme m, soit ruiné en jouant μ parties au maximum, son gain n'ayant jamais précédemment atteint la somme n.

Ce problème a été résolu dans mon étude sur la théorie mathématique du jeu dans le cas où les parties sont identiques et dans mon étude sur la théorie des probabilités continues dans le cas général.

La probabilité cherchée a pour valeur

$$\begin{aligned} P_{\mu,m,m} = & \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{m}{\sqrt{2\Sigma pq}}} e^{-\lambda^2} d\lambda\right) - \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{m+2n}{\sqrt{2\Sigma pq}}} e^{-\lambda^2} d\lambda\right) \\ & + \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{3m+2n}{\sqrt{2\Sigma pq}}} e^{-\lambda^2} d\lambda\right) - \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{3m+4n}{\sqrt{2\Sigma pq}}} e^{-\lambda^2} d\lambda\right) \\ & + \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{5m+4n}{\sqrt{2\Sigma pq}}} e^{-\lambda^2} d\lambda\right) - \ldots . \end{aligned}$$

Elle se calcule sans difficulté par les Tables de Kramp.

Cette formule, établie en supposant la continuité, n'est applicable que si m et n sont grands.

11. Nous appellerons *second écart moyen* la valeur moyenne du plus grand écart qui se produit dans le cours de μ épreuves.

La probabilité pour que $\pm m$ soit le plus grand écart positif ou négatif dans le cours des μ épreuves est

$$\frac{\partial}{\partial m}(1 - 2P_{\mu,m,m}) = \frac{4}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\Sigma pq}} \left(e^{-\frac{m^2}{2\Sigma pq}} - 3e^{-\frac{(3m)^2}{2\Sigma pq}} + 5e^{-\frac{(5m)^2}{2\Sigma pq}} - \ldots\right),$$

et la valeur moyenne de m est

$$\int_0^\infty m \frac{\partial}{\partial m}(1 - 2\mathrm{P}_{\mu,m,m})\, dm$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\Sigma pq}}\left(\int_0^\infty m e^{-\frac{m^2}{2\Sigma pq}} dm - \int_0^\infty 3 m e^{-\frac{(3m)^2}{2\Sigma pq}} dm + \int_0^\infty 5 m e^{-\frac{(5m)^2}{2\Sigma pq}} dm - \ldots\right),$$

c'est-à-dire en effectuant les intégrations

$$\frac{2\sqrt{2\Sigma pq}}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right).$$

D'après le développement connu de la fonction arc tang$x$, la série a pour valeur $\frac{\pi}{4}$.

Le second écart moyen a donc pour valeur

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{2\Sigma pq};$$

il est égal au premier écart moyen multiplié par $\frac{\pi}{2}$.

Ce théorème a été démontré pour la première fois dans mon étude sur la théorie mathématique du jeu, mais ici nous ne supposons plus que les épreuves soient identiques.

Le premier écart probable est celui qui a autant de chances d'être ou de ne pas être dépassé à la $\mu^{\text{ième}}$ épreuve. Le *second écart probable* est celui qui a des chances égales d'être ou de ne pas être dépassé dans le cours des μ épreuves.

On démontre, en se basant sur la formule du n° **10**, que le second écart probable a pour valeur $0,8062\ldots\sqrt{2\Sigma pq}$; il est égal au premier écart probable multiplié par $1,7\ldots$.

Nous allons maintenant reprendre notre étude sur les probabilités à plusieurs variables.

12. Appliquons la formule du n° **7** au problème relatif aux tirages dans une urne qui a été traité précédemment (n° **4**).

La probabilité pour que les écarts soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en μ tirages

est

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu}\frac{1}{\frac{s-\mu}{s}}\left(\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{p_{n-1}}+\frac{x_n^2}{p_n}\right)}}{\left(\sqrt{2\pi\mu\frac{s-\mu}{s}}\right)^{n-1}\sqrt{p_1 p_2\ldots p_n}}.$$

Si l'on compare cette formule à celle du n° **6**, on voit que, dans le cas actuel, les écarts sont diminués dans le rapport de $\sqrt{s-\mu}$ à $\sqrt{s}$.

13. L'égalité de Stirling conduit à des formules continues, mais elle a le grand inconvénient d'exiger la connaissance des formules discontinues correspondantes.

La *Théorie des probabilités continues*, qui suppose la continuité *a priori* et qui est absolument indépendante des probabilités discontinues, conduit à des résultats beaucoup plus généraux.

La présente étude montre cependant que, dans certains cas particuliers, l'emploi de la formule de Stirling permet d'obtenir très simplement les résultats et que son usage est susceptible de généralisation.

Formule de Bayes.

14. Nous allons nous occuper des questions relatives aux probabilités des causes.

Un exemple n'est pas inutile pour faire comprendre le sens attribué au mot *cause* dans le calcul des probabilités : un joueur a joué cinq parties; à chaque partie il avait égale probabilité de gagner ou de perdre 1[fr]; finalement il a gagné en totalité 1[fr]. A la troisième partie, il avait nécessairement perdu 1[fr] ou gagné 1[fr] ou 3[fr]; ces trois alternatives sont dites *les causes* du fait observé qui est le gain total de 1[fr].

Lorsqu'on ignorait l'issue du jeu, les causes avaient pour probabilité *a priori* $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$ et $\frac{1}{8}$. Lorsqu'on sait que le joueur a gagné finalement 1[fr] sans savoir quelle a été la suite de ses gains et de ses pertes, les probabilités des trois alternatives se trouvent changées; on les nomme probabilités *a posteriori*.

Énonçons maintenant le problème de Bayes :

Diverses causes E_1, E_2, ..., E_k *ont pu produire un événement observé. Les probabilités des causes lorsque le résultat n'était pas encore connu (probabilités* a priori) *étaient* ϖ_1, ϖ_2, ..., ω_k. *L'événement se produit; la cause* E_i, *quand on est certain que c'est elle qui agit, donne à l'événement la probabilité* Π_i. *Quelle est la probabilité pour que* E_i *soit la cause de l'événement (probabilité* a posteriori)?

Soit x la probabilité cherchée; nous écrirons de deux manières différentes la probabilité pour que le fait se produise et qu'il soit dû à la cause considérée :

1° Il faut d'abord que la cause soit mise en jeu (probabilité ϖ_i) et qu'elle produise l'événement (probabilité Π_i).

2° Il faut que l'événement se produise

$$(\text{probabilité } \varpi_1\Pi_1 + \varpi_2\Pi_2 + \ldots + \varpi_k\Pi_k),$$

et que, s'étant produit, il soit dû à la cause désignée (probabilité x). On a donc

$$\varpi_i\Pi_i = (\varpi_1\Pi_1 + \varpi_2\Pi_2 + \ldots + \varpi_k\Pi_k)x,$$

d'où

$$x = \frac{\varpi_i\Pi_i}{\varpi_1\Pi_1 + \varpi_2\Pi_2 + \ldots + \varpi_k\Pi_k}.$$

Telle est l'expression de la probabilité *a posteriori*.

Probabilités des causes dans les épreuves répétées.

15. *Soient* P_1, P_2, ..., P_n *les probabilités de* n *événements qui s'excluent mutuellement et qui sont tels que l'un quelconque d'entre eux doit nécessairement se produire à chaque épreuve.*

En μ *épreuves (supposées identiques), le premier s'est produit* m_1 *fois, le second* m_2 *fois, ..., le* $n^{\text{ième}}$ m_n *fois* $(m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \mu)$. *Quelle est la probabilité* a posteriori *pour que* P_1 *ait la valeur* y_1, P_2 *la valeur* y_2, ..., P_n *la valeur* y_n, $(y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1)$?

Soit $\varpi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1}$ la probabilité *a priori* (supposée connue) pour que les probabilités des événements soient

$y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, c'est-à-dire pour que la probabilité du premier soit comprise entre y_1 et $y_1 + dy_1$, celle du second entre y_2 et $y_2 + dy_2$, ...

Si le fait observé a eu pour cause les valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, celles-ci donnent à l'événement observé la probabilité (n° 1)

$$\frac{\mu!}{m_1!\, m_2! \ldots m_n!} y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_{n-1}^{m_{n-1}} (1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1})^{m_n};$$

la probabilité demandée est, d'après le théorème de Bayes,

$$\frac{y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_{n-1}^{m_{n-1}} (1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1})^{m_n} \varpi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-1}}{\int\int \ldots \int y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_{n-1}^{m_{n-1}} (1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1})^{m_n} \varpi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-1}}.$$

L'intégration s'étend à toutes les valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ telles que

$$1 > y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} > 0,$$

si l'on suppose que la fonction ϖ s'étend à ce même système de valeurs.

Expression finale des probabilités.

16. Si le nombre μ des épreuves était infini, les événements se produiraient proportionnellement à leur probabilité et il n'y aurait pour $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ que le seul système de valeurs

$$y_1 = \frac{m_1}{\mu}, \quad y_2 = \frac{m_2}{\mu}, \quad \ldots, \quad y_{n-1} = \frac{m_{n-1}}{\mu}, \quad y_n = \frac{m_n}{\mu}.$$

Ces valeurs correspondent nécessairement à la plus grande probabilité *a posteriori*.

Cette plus grande probabilité s'obtient en annulant les dérivées par rapport aux diverses variables du numérateur de l'expression générale du paragraphe précédent. Or la dérivée par rapport à y_1 peut s'écrire

$$y_1^{m_1-1} y_2^{m_2} \ldots y_{n-1}^{m_{n-1}} (1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1})^{m_n-1}$$
$$\times \left\{ [m_1(1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1}) - y_1 m_n] \varpi - y_1 (1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1}) \frac{\partial \varpi}{\partial y_1} \right\};$$

si on l'égale à zéro en négligeant les termes qui ne contiennent pas en facteur les quantités $m_1, \ldots, m_n$, on obtient

$$m_1(1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1}) - y_1 m_n = 0,$$

et $n-2$ équations analogues. La solution de ce système est nécessairement

$$y_1 = \frac{m_1}{\mu}, \qquad y_2 = \frac{m_2}{\mu}, \qquad \ldots, \qquad y_n = \frac{m_n}{\mu}.$$

Expression pénultième des probabilités.

17. Si le nombre μ des épreuves est très grand, les probabilités ne peuvent avoir de valeurs sensibles que pour les valeurs de y_1 voisines de $\frac{m_1}{\mu}$, de y_2 voisines de $\frac{m_2}{\mu}$, ... Posons

$$y_1 = \frac{m_1}{\mu} + \varepsilon_1 = p_1 + \varepsilon_1,$$

$$y_2 = \frac{m_2}{\mu} + \varepsilon_2 = p_2 + \varepsilon_2, \qquad \ldots, \qquad y_n = \frac{m_n}{\mu} + \varepsilon_n = p_n + \varepsilon_n.$$

On a évidemment

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n = 0;$$

ε_1, ε_2, ... sont très petits et négligeables par rapport à p_1, p_2, ...

La probabilité pour que P_1 ait la valeur $p_1 + \varepsilon_1$, P_2 la valeur $p_2 + \varepsilon_2$, ... est, d'après la formule du n° **15**,

$$\frac{(p_1+\varepsilon_1)^{\mu p_1}(p_2+\varepsilon_2)^{\mu p_2}\ldots(p_n+\varepsilon_n)^{\mu p_n}\varpi}{\int\int\cdots\int(p_1+\varepsilon_1)^{\mu p_1}(p_2+\varepsilon_2)^{\mu p_2}\ldots(p_n+\varepsilon_n)^{\mu p_n}\varpi\, d\varepsilon_1\ldots d\varepsilon_{n-1}}.$$

Cette expression peut s'écrire en supprimant les termes négligeables et les facteurs communs

$$\frac{\left[1-\frac{\mu}{2}\left(\frac{\varepsilon_1^2}{p_1}+\frac{\varepsilon_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{\varepsilon_n^2}{p_n}\right)\right]\varpi}{\int\int\cdots\int\left[1-\frac{\mu}{2}\left(\frac{\varepsilon_1^2}{p_1}+\frac{\varepsilon_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{\varepsilon_n^2}{p_n}\right)\right]\varpi\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2\ldots d\varepsilon_{n-1}}$$

ou encore

$$\frac{e^{-\frac{\mu}{2}\left(\frac{\varepsilon_1^2}{p_1}+\frac{\varepsilon_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{\varepsilon_n^2}{p_n}\right)}\varpi}{\int\int\cdots\int e^{-\frac{\mu}{2}\left(\frac{\varepsilon_1^2}{p_1}+\frac{\varepsilon_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{\varepsilon_n^2}{p_n}\right)}\varpi\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2\ldots d\varepsilon_{n-1}}.$$

Développons la fonction $\varpi\,[(p_1+\varepsilon_1), (p_2+\varepsilon_2), \ldots, (p_{n-1}+\varepsilon_{n-1})]$ par la formule de Taylor

$$\varpi[(p_1+\varepsilon_1), \ldots, (p_{n-1}+\varepsilon_{n-1})] = \varpi(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}) + \varepsilon_1 \frac{\partial\varpi}{\partial p_1} + \ldots + \varepsilon_{n-1}\frac{\partial\varpi}{\partial p_{n-1}} + \ldots.$$

Les ε étant très petits, la fonction ϖ se réduit à sa partie constante et disparaît de l'expression de la probabilité; celle-ci devient

$$\frac{e^{-\frac{\mu}{2}\left(\frac{\varepsilon_1^2}{p_1}+\frac{\varepsilon_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{\varepsilon_n^2}{p_n}\right)}}{\int\int\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\mu}{2}\left(\frac{\varepsilon_1^2}{p_1}+\frac{\varepsilon_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{\varepsilon_n^2}{p_n}\right)} d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_{n-1}}.$$

Les intégrations sont prises entre $-\infty$ et $+\infty$, ce qui est légitime par suite de la forme de l'élément de l'intégrale.

La somme $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n$ étant nulle et la somme $p_1+p_2+\ldots+p_n$ ayant pour valeur *un*, l'intégrale se détermine par la formule du n° **8**; sa valeur est

$$\frac{(\sqrt{2\pi})^{n-1}\sqrt{p_1 p_2\ldots p_n}}{(\sqrt{\mu})^{n-1}}.$$

La probabilité pour que P_1 ait la valeur $p_1+\varepsilon_1$, P_2 la valeur $p_2+\varepsilon_2$, ... est donc

$$\frac{(\sqrt{\mu})^{n-1} e^{-\frac{\mu}{2}\left(\frac{\varepsilon_1^2}{p_1}+\frac{\varepsilon_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{\varepsilon_n^2}{p_n}\right)}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}\sqrt{p_1 p_2\ldots p_n}}.$$

Telle est l'expression pénultième des probabilités.

Lorsque le nombre μ des épreuves est très grand, les probabilités *a posteriori* sont, comme on le voit, indépendantes des probabilités initiales (ou probabilités *a priori*), et les lois qui les régissent, qu'on peut dénommer *lois pénultièmes,* ont, par suite, un très haut degré de généralité.

La formule ci-dessus montre que *les quantités* $\frac{m_1}{\mu}, \frac{m_2}{\mu}, \ldots, \frac{m_n}{\mu}$ *expriment les probabilités avec une précision proportionnelle à la racine carrée du nombre des épreuves.*

Étude d'un cas particulier.

18. Si μ n'est pas très grand, à chaque hypothèse faite sur la fonction ϖ correspond une valeur différente pour la probabilité *a posteriori*.

Si l'on n'a aucune idée *a priori* sur les probabilités, l'hypothèse la plus simple consiste à poser $\varpi = 1$. Alors, le dénominateur de la probabilité *a posteriori* (n° **15**) est l'intégrale

$$\int\int\cdots\int y_1^{m_1} y_2^{m_2}\cdots y_{n-1}^{m_{n-1}}(1-y_1-y_2-\ldots-y_{n-1})^{m_n}\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1}$$

qui est étendue à tous les systèmes de valeurs de $y_1, \ldots, y_{n-1}$, tels que

$$1 > y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} > 0.$$

Cette intégrale est du type de celles qui ont été déterminées par Dirichlet; sa valeur est

$$\frac{\Gamma(m_1+1)\,\Gamma(m_2+1)\ldots\Gamma(m_{n-1}+1)\,\Gamma(m_n+1)}{\Gamma(m_1+m_2+\ldots+m_n+n)}$$

ou

$$\frac{m_1!\,m_2!\ldots m_n!}{(m_1+m_2+\ldots+m_n+n-1)!}.$$

La probabilité cherchée a donc pour valeur

$$\frac{(m_1+m_2+\ldots+m_n+n-1)!}{m_1!\,m_2!\ldots m_n!}\,y_1^{m_1} y_2^{m_2}\cdots y_{n-1}^{m_{n-1}}(1-y_1-y_2-\ldots-y_{n-1})^{m_n}\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1}.$$

Étude du cas général.

19. Supposons maintenant que $\varpi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ soit quelconque, mais développable en série entière,

$$\begin{aligned}\varpi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = a_0 + a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \ldots + a_{1,n-1}y_{n-1}\\ + a_{2,1}y_1^2 + a_{2,2}y_2^2 + \ldots + b_{1,2}y_1y_2 + \ldots,\end{aligned}$$

et que cette fonction ϖ s'étende à tous les systèmes de valeurs

de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ tels que

$$1 > y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} > 0;$$

le dénominateur de l'expression générale de la probabilité *a posteriori* (n° **15**),

$$\int\int\cdots\int y_1^{m_1} y_2^{m_2} \cdots y_{n-1}^{m_{n-1}} (1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1})^{m_n} \varpi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-1},$$

se composera alors d'une somme d'intégrales de Dirichlet et pourra ainsi être obtenu sous forme d'un développement en série; en désignant par S cette série, l'expression de la probabilité sera

$$\frac{1}{S} y_1^{m_1} y_2^{m_2} \cdots y_{n-1}^{m_{n-1}} (1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1})^{m_n} \varpi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-1}.$$

Probabilité des événements futurs d'après les événements observés.

20. *En μ épreuves, l'événement A_1 s'est produit m_1 fois; l'événement A_2, m_2 fois; ...; l'événement A_n, m_n fois. Quelle est la probabilité pour que, en μ' nouvelles épreuves, les événements se produisent suivant une loi donnée?*

On suppose que les événements s'excluent, que l'un quelconque d'entre eux se produit nécessairement à chaque épreuve et que les nouvelles épreuves sont identiques aux précédentes.

Soit $\lambda(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ la probabilité *a posteriori* pour que P_1, P_2, ... aient les valeurs $y_1, y_2, \ldots$.

Soit $\psi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \mu')$ la probabilité pour que, en μ' épreuves, les événements se produisent suivant la loi donnée quand les probabilités P_1, P_2, ... de ces événements sont $y_1, y_2, \ldots$.

La probabilité pour que P_1, P_2, ... aient les valeurs $y_1, y_2, \ldots$ et pour que les événements se produisent suivant la loi donnée est, d'après le principe des probabilités composées,

$$\lambda(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \times \psi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \mu')\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-1}.$$

D'après le principe des probabilités totales, la probabilité cherchée est la somme des quantités analogues pour l'ensemble des valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ qui satisfont à la loi donnée; cette probabilité est

donc exprimée par la formule

$$\int\int\cdots\int\lambda(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\times\psi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \mu')\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1},$$

qu'on peut aussi écrire, en remplaçant λ par sa valeur (n° **15**),

$$\frac{\int\int\cdots\int y_1^{m_1}y_2^{m_2}\ldots y_{n-1}^{m_{n-1}}(1-y_1-y_2-\ldots-y_{n-1})^{m_n}\varpi\psi\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1}}{\int\int\cdots\int y_1^{m_1}y_2^{m_2}\ldots y_{n-1}^{m_{n-1}}(1-y_1-y_2-\ldots-y_{n-1})^{m_n}\varpi\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1}}.$$

L'intégrale du numérateur est relative aux systèmes de valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ que rendent possibles la forme de la fonction ϖ et la loi exprimée par la fonction ψ.

L'intégrale du dénominateur s'étend aux systèmes de valeurs que rend possibles la forme de la fonction ϖ.

Lorsque $\varpi = 1$, l'expression de la probabilité se réduit à

$$\frac{(m_1+m_2+\ldots+m_n+n-1)!}{m_1!\,m_2!\ldots m_n!}$$
$$\times\int\int\cdots\int y_1^{m_1}y_2^{m_2}\ldots y_{n-1}^{m_{n-1}}(1-y_1-y_2-\ldots-y_{n-1})^{m_n}\psi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \mu')\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1}.$$

21. *En μ épreuves, l'événement* A_1 *s'est produit* m_1 *fois; l'événement* A_2, m_2 *fois; ...; l'événement* A_n, m_n *fois. Quelle est la probabilité pour que, en μ' nouvelles épreuves, l'événement* A_1 *se produise* m'_1 *fois; l'événement* A_2, m'_2 *fois; ...; l'événement* A_n, m'_n *fois?*

Nous nous plaçons dans l'hypothèse où $\varpi = 1$. On a, dans le cas considéré,

$$\psi = \frac{(m'_1+m'_2+\ldots+m'_n)!}{m'_1!\,m'_2!\ldots m'_n!}\,y_1^{m'_1}y_2^{m'_2}\ldots y_{n-1}^{m'_{n-1}}(1-y_1-y_2-\ldots-y_{n-1})^{m'_n}.$$

La probabilité est donc

$$\frac{(m_1+m_2+\ldots+m_n+n-1)!}{m_1!\,m_2!\ldots m_n!}\,\frac{(m'_1+m'_2+\ldots+m'_n)!}{m'_1!\,m'_2!\ldots m'_n!}$$
$$\times\int\int\cdots\int y_1^{m_1+m'_1}y_2^{m_2+m'_2}\ldots y_{n-1}^{m_{n-1}+m'_{n-1}}(1-y_1-y_2-\ldots-y_{n-1})^{m_n+m'_n}\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1},$$

l'intégration s'étendant à toutes les valeurs telles que

$$1 > y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} > 0.$$

La probabilité cherchée est donc

$$\frac{(m_1 + m_2 + \ldots + m_n + n - 1)!}{m_1!\, m_2! \ldots m_n!} \frac{(m'_1 + m'_2 + \ldots + m'_n)!}{m'_1!\, m'_2! \ldots m'_n!} \times \frac{(m_1 + m'_1)!\,(m_2 + m'_2)! \ldots (m_n + m'_n)!}{(m_1 + m'_1 + m_2 + m'_2 + \ldots + m_n + m'_n + n - 1)!}.$$

La probabilité pour que l'événement A_1 se produise si l'on fait une seule épreuve est $\frac{m_1 + 1}{\mu + n}$; elle est très voisine de $\frac{m_1}{\mu}$ lorsque μ est un grand nombre.

22. Supposons que $m_1, m_2, \ldots, m_n, m'_1, m'_2, \ldots, m'_n$ soient de grands nombres; posons

$$\frac{m_1}{\mu} = p_1, \qquad \frac{m_2}{\mu} = p_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{m_n}{\mu} = p_n.$$

Posons encore

$$m'_1 = \mu' p_1 + x_1, \qquad m'_2 = \mu' p_2 + x_2, \qquad \ldots, \qquad m'_n = \mu' p_n + x_n;$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les *écarts*.

Transformons l'expression factorielle en exponentielle; elle devient

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu'\frac{\mu+\mu'}{\mu}}\left(\frac{x_1^2}{p_1} + \frac{x_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{p_n}\right)}}{\left(\sqrt{2\pi\mu'\frac{\mu + \mu'}{\mu}}\right)^{n-1} \sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}.$$

Si les événements avaient pour probabilités exactes $p_1, p_2, \ldots, p_n$, la probabilité pour que les écarts soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ serait (n° **6**)

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu'}\left(\frac{x_1^2}{p_1} + \frac{x_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{p_n}\right)}}{(\sqrt{2\pi\mu'})^{n-1} \sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}.$$

L'ignorance où l'on est des valeurs exactes des probabilités augmente donc les écarts dans le rapport de $\sqrt{\mu + \mu'}$ *à* $\sqrt{\mu}$.

Nous nous sommes placés dans l'hypothèse où $\varpi = 1$; mais, le nombre μ étant très grand, le résultat est indépendant de cette hypothèse (n° **17**).

Le théorème ci-dessus, l'un des plus importants du calcul des probabilités, exprime une loi pénultième ; il est indépendant de toute hypothèse sur les valeurs initiales des probabilités.

23. Si μ n'est pas très grand et si la fonction ϖ est quelconque, la probabilité pour que, en μ' nouvelles épreuves, le premier événement se produise m'_1 fois, le second m'_2 fois, ... est

$$\frac{(m'_1 + m'_2 + \ldots + m'_n)!}{m'_1!\, m'_2! \ldots m'_n!}$$
$$\times \frac{\int\int \cdots \int y_1^{m_1+m'_1} y_2^{m_2+m_2} \ldots y_{n-1}^{m_{n-1}+m'_{n-1}} (1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1})^{m_n+m'_n} \varpi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-1}}{\int\int \cdots \int y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_{n-1}^{m_{n-1}} (1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1})^{m_n} \varpi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-1}}.$$

Les deux intégrales sont de la même forme ; elles doivent s'étendre à tous les systèmes de valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ tels que

$$1 > y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} > 0$$

si la fonction ϖ s'étend, comme nous le supposerons, à tous ces systèmes de valeurs. Si, de plus, ϖ est développable en série entière, chacune des intégrales est décomposable en une suite d'intégrales de Dirichlet, et la probabilité est alors exprimée par le quotient des deux séries.

24. Les résultats les plus importants de la théorie que nous venons d'exposer sont exprimés par des lois finales et pénultièmes ; il est donc utile de connaître les conditions *a priori* que supposent ces lois.

Supposons pour simplifier qu'il n'y ait qu'une variable ; soient P la probabilité d'un événement et $\varpi(y)$ la probabilité *a priori* pour que P ait la valeur y.

La quantité $\varpi(y)$ doit nécessairement être positive et telle que la somme de ses valeurs pour toutes les valeurs possibles de y soit *un*.

Si $\varpi(y)$ est une fonction continue ne s'annulant pas et ne devenant pas infinie entre zéro et *un*, les formules finales et pénultièmes sont

légitimes, pourvu que toutes les alternatives possibles se soient produites un grand nombre de fois.

Les formules pénultièmes sont donc applicables quand la loi des probabilités *a priori* est quelconque, mais en quelque sorte naturelle; et il faut, pour les mettre en défaut, former de toutes pièces des lois particulières qui ne présentent aucun intérêt au point de vue du calcul des probabilités.

Si l'on ne connaît rien sur la probabilité *a priori* d'un événement, la fonction $\varpi(y)$ peut être quelconque, mais elle ne peut, pour aucune valeur de y, devenir négative et zéro est son minimum absolu; la supposer nulle pour un intervalle fini de ε est se placer dans un cas infiniment particulier; c'est précisément ce cas qui mettrait en défaut les formules finales si celles-ci conduisaient à une valeur de y qui devrait être nulle *a priori*.

L'emploi des formules finales et pénultièmes est donc légitime.

25. Il n'est peut-être pas inutile de donner un exemple qui montre la décroissance de l'influence des hypothèses initiales lorsque le nombre des épreuves augmente.

Supposons qu'on ait fait $2m$ épreuves et qu'un événement se soit produit m fois.

Dans l'hypothèse où $\varpi = 1$, la probabilité pour que l'événement se produise à l'épreuve suivante est 0,5.

Considérons une autre hypothèse et posons, par exemple,

$$\varpi(y) = 11y^{10}.$$

Lorsqu'on supposait que ϖ avait pour valeur *un*, la probabilité de l'événement avait *a priori* autant de chances d'être supérieure à $\frac{1}{2}$ que d'être inférieure à $\frac{1}{2}\cdot$ Dans l'hypothèse où $\varpi(y) = 11y^{10}$, il n'y a, *a priori*, qu'une chance sur deux mille pour que la probabilité de l'événement soit inférieure à $\frac{1}{2}\cdot$ Le second cas, pour être très différent du premier, conduit cependant à des chiffres très voisins si m est un grand nombre.

Les formules ci-dessus permettent de calculer sans difficulté la pro-

babilité pour que l'événement se produise à l'épreuve suivante dans l'hypothèse où $\varpi(y) = 11y^{10}$. Cette probabilité est $\frac{m+11}{2m+12}$. Lorsque $m = 100$, elle a pour valeur 0,523; lorsque $m = 10000$, elle a pour valeur 0,5002, elle est donc très proche de la valeur asymptote 0,5000 obtenue dans l'hypothèse où $\varpi = 1$.

Problèmes divers.

26. *Une urne contient a boules de n couleurs différentes; les unes sont blanches, les autres noires, rouges, ..., vertes, on ignore en quelle proportion. On tire* $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \mu$ *boules de l'urne:* m_1 *sont blanches,* m_2 *sont noires, ...,* m_n *sont vertes. Quelle est la probabilité pour que l'urne ait une composition donnée?*

On suppose que les μ boules sont extraites simultanément ou successivement, les boules extraites n'étant pas replacées dans l'urne.

Soit $\varpi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ la probabilité *a priori* pour qu'il y ait dans l'urne y_1 boules blanches, y_2 boules noires, ..., y_n boules vertes $(y_1 + y_2 + \ldots + y_n = a)$.

S'il y avait effectivement y_1 boules blanches, y_2 boules noires, etc., la probabilité pour qu'en $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \mu$ tirages il sorte m_1 boules blanches, m_2 boules noires, etc., serait (n° **5**)

$$\frac{\mu!}{m_1!\, m_2! \ldots m_n!} \frac{y_1!}{(y_1 - m_1)!} \frac{y_2!}{(y_2 - m_2)!} \cdots \frac{y_n}{(y_n - m_n)!} \frac{(a-\mu)!}{a!}.$$

La probabilité demandée est donc

$$\frac{y_1!\, y_2! \ldots y_n!\, \varpi(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{(y_1 - m_1)!\,(y_2 - m_2)! \ldots (y_n - m_n)! \sum \frac{y_1!\, y_2! \ldots y_n!\, \varpi(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{(y_1 - m_1)!\,(y_2 - m_2)! \ldots (y_n - m_n)!}},$$

le $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs entières de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ telles que y_1 soit au moins égal à m_1, y_2 au moins égal à m_2, ..., et telles que $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = a$.

A chaque hypothèse faite sur la forme de la fonction ϖ correspond une valeur différente pour la probabilité cherchée.

Nous supposerons d'abord que toutes les compositions de l'urne sont

a priori également probables; alors ϖ est constant et disparaît dans l'expression de la probabilité. Le $\sum$ a pour valeur

$$\frac{m_1!\,m_2!\,\ldots\,m_n!}{(\mu+n-1)!}\,\frac{(a+n-1)!}{(a-\mu)!},$$

et la probabilité cherchée est

$$\frac{y_1!\,y_2!\,\ldots\,y_n!\,(\mu+n-1)!\,(a-\mu)!}{(y_1-m_1)!\,(y_2-m_2)!\,\ldots\,(y_n-m_n)!\,m_1!\,m_2!\,\ldots\,m_n!\,(a+n-1)!}.$$

La plus grande probabilité correspond au cas où

$$y_1=\frac{m_1}{a},\qquad y_2=\frac{m_2}{a},\qquad \ldots.$$

27. *Si l'on effectue μ' nouveaux tirages, quelle est la probabilité pour obtenir m'_1 boules blanches, m'_2 boules noires, ...?*

Si l'urne contenait y_1 boules blanches, y_2 boules noires, etc., après la sortie des μ boules, elle contient y_1-m_1 boules blanches, y_2-m_2 boules noires, etc. La probabilité pour qu'en μ' tirages il sorte m'_1 boules blanches, m'_2 boules noires, etc., serait alors (n° **3**)

$$\frac{\mu'!}{m'_1!\,m'_2!\,\ldots\,m'_n!}\,\frac{(y_1-m_1)!}{(y_1-m_1-m'_1)!}\times\frac{(y_2-m_2)!}{(y_2-m_2-m'_2)!}\cdots\frac{(y_n-m_n)!}{(y_n-m_n-m'_n)!}\,\frac{(a-\mu-\mu')!}{(a-\mu)!}.$$

Si l'on multiplie cette quantité par la probabilité *a posteriori* pour que les y aient respectivement pour valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et si l'on fait la somme de tous les résultats analogues, on obtient, d'après les principes des probabilités composées et totales, la probabilité cherchée; celle-ci a donc pour valeur

$$\frac{\mu'!\,(a-\mu-\mu')!\,(\mu+n-1)!}{m'_1!\,m'_2!\,\ldots\,m'_n!\,m_1!\,m_2!\,\ldots\,m_n!\,(a+n-1)!}\times\sum\frac{y_1!\,y_2!\,\ldots\,y_n!}{(y_1-m_1-m'_1)!\,(y_2-m_2-m'_2)!\,\ldots\,(y_n-m_n-m'_n)!},$$

le $\sum$ s'étendant à tous les systèmes de valeurs de y_1, y_2, ... y_n tels que y_1 soit au moins égal à $m_1+m'_1$, y_2 au moins égal à $m_2+m'_2$, ...

et tels que $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = a$. Ce $\sum$ a pour valeur

$$\frac{(m_1 + m'_1)!\,(m_2 + m'_2)!\ldots(m_n + m'_n)!}{(\mu + \mu' + n - 1)!}\,\frac{(a + n - 1)!}{(a - \mu - \mu')!}.$$

La probabilité cherchée est donc

$$\frac{\mu'}{m'_1!\,m'_2!\ldots m'_n!}\,\frac{(\mu + n - 1)!}{m_1!\,m_2!\ldots m_n!}\,\frac{(m_1 + m'_1)!\,(m_2 + m'_2)!\ldots(m_n + m'_n)!}{(\mu + \mu' + n - 1)!}.$$

Cette probabilité est indépendante de a, elle a même valeur que si a était infini. Si a était infini, la probabilité *a priori* d'extraire une boule de couleur donnée serait la même à chaque tirage et l'on serait ramené au problème du n° **21**. La dernière formule que nous venons d'obtenir est d'ailleurs identique à celle du n° **21**.

28. Ce résultat curieux demande une explication. Supposons qu'une urne B renferme b boules de diverses couleurs et supposons qu'on tire au hasard a boules de cette urne pour les placer dans une seconde urne A.

La probabilité d'extraire m_1 boules blanches, m_2 boules noires, etc., de A est évidemment la même que celle d'extraire ces mêmes nombres de boules de l'urne B quand celle-ci contient encore les b boules.

Lorsqu'on extrait, de l'urne A, m_1 boules blanches, m_2 boules noires, etc., on obtient, relativement à la sortie des boules suivantes de cette urne, le même renseignement qu'on aurait obtenu pour la sortie des boules suivantes de l'urne B si l'on supposait que cette urne ait renfermé b boules et qu'on en ait extrait m_1 blanches, m_2 noires, etc.

Lorsque toutes les compositions de l'urne B sont *a priori* également vraisemblables, celles de l'urne A le sont aussi.

Nous avons supposé que toutes les compositions de l'urne A étaient *a priori* également vraisemblables; nous pouvons donc supposer que cette urne a été remplie en tirant a boules au hasard dans une urne B contenant un nombre arbitraire b de boules, toutes les compositions de cette urne B étant *a priori* également vraisemblables.

Si de l'urne A on extrait m_1 boules blanches, m_2 boules noires, etc., le renseignement qu'on obtient pour la sortie des boules suivantes est le même que s'il s'agissait de l'urne B quand elle contient b boules;

il est donc indépendant du nombre des boules contenues dans l'urne.

29. Considérons le cas où a, μ et μ' sont grands; posons

$$\frac{m_1}{\mu} = p_1, \qquad \frac{m_2}{\mu} = p_2, \qquad \ldots;$$

posons également

$$m'_1 = \mu' p_1 + x_1, \qquad m'_2 = \mu' p_2 + x_2, \qquad \ldots;$$

x_1, x_2, ... sont les *écarts*.

Transformant alors l'expression factorielle de la probabilité en expression exponentielle, on obtient la probabilité pour que les écarts soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$; c'est

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu'\frac{\mu+\mu'}{\mu}}\left(\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{p_n}\right)}}{\left(\sqrt{2\pi\mu'\frac{\mu+\mu'}{\mu}}\right)^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}.$$

Si l'on savait que l'urne contient exactement $a - \mu$ boules dont $\frac{m_1}{\mu}(a-\mu)$ blanches, $\frac{m_2}{\mu}(a-\mu)$ noires, etc., la probabilité pour que les écarts soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ après μ' tirages serait (n° **12**)

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu'\frac{a-\mu-\mu'}{a-\mu}}\left(\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{p_n}\right)}}{\left(\sqrt{2\pi\mu'\frac{a-\mu-\mu'}{a-\mu}}\right)^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}.$$

L'ignorance où l'on est de la composition exacte de l'urne augmente donc les écarts dans le rapport de $\sqrt{(\mu+\mu')(a-\mu)}$ à $\sqrt{\mu(a-\mu-\mu')}$.

30. Nous avons supposé que toutes les compositions de l'urne étaient *a priori* également probables; on peut résoudre les mêmes questions en supposant que l'urne ait été remplie en tirant au hasard la couleur des boules avec la probabilité p_1 pour les blanches, p_2 pour les noires, etc.

On peut obtenir sans grande difficulté la probabilité *a posteriori*

pour que l'urne ait une composition donnée, puis la probabilité pour que, si l'on effectue μ' nouveaux tirages (toujours sans remettre les boules), on obtienne m'_1 boules blanches, m'_2 boules noires, etc. Pour ce dernier problème, on est conduit à cette conclusion : c'est que la probabilité a même valeur que si l'on avait tiré directement les μ' boules avec la probabilité p_1 pour les blanches, p_2 pour les noires, etc.

Pour expliquer ce fait, il suffit de reprendre un raisonnement précédemment employé (n° **28**). L'urne A est remplie en tirant au hasard a boules d'une urne B qui en contient une infinité, les nombres des boules blanches, noires, etc., de cette urne B étant proportionnels à $p_1, p_2, \ldots$.

Lorsqu'on extrait, de l'urne A, m_2 boules blanches, m_2 boules noires, etc., on obtient, relativement à la sortie des boules suivantes, le même renseignement que s'il s'agissait de l'urne B. Cette dernière urne étant infinie, les sorties antérieures n'influent en rien sur les probabilités relatives aux tirages futurs; il en est donc de même quand il s'agit de l'urne A.

On peut aller plus loin et calculer la probabilité *a posteriori* pour que l'urne A ait une composition donnée sans avoir recours à la théorie de la probabilité des causes. L'urne A étant remplie comme il a été dit, le fait d'avoir extrait de cette urne m_1 boules blanches, m_2 boules noires, ..., m_n boules vertes, ne change en rien les probabilités relatives aux $a - m_1 - m_2 - \ldots - m_n$ autres boules; la probabilité pour que, parmi celles-ci, il y ait z_1 boules blanches, z_2 boules noires, ..., z_n boules vertes ($z_1 + \ldots + z_n = a - m_1 - \ldots - m_n$), est donc *a posteriori* comme *a priori*

$$\frac{(a - m_1 - m_2 - \ldots - m_n)!}{z_1!\, z_2! \ldots z_n!} p_1^{z_1} p_2^{z_2} \ldots p_n^{z_n}.$$

Telle est la probabilité *a posteriori* pour que l'urne renferme $m_1 + z_1$ boules blanches, $m_2 + z_2$ boules noires, etc.

31. *Une urne A contient un très grand nombre a de boules de n couleurs différentes, blanches, noires, etc., vertes, dans une proportion inconnue.*

L'urne a été remplie en tirant les boules au hasard avec la pro-

babilité p_1 *pour les blanches,* p_2 *pour les noires, etc.,* p_n *pour les vertes.*

On tire successivement μ *boules de l'urne en remettant après chaque tirage la boule sortie. On obtient* m_1 *boules blanches,* m_2 *boules noires, etc.,* m_n *boules vertes. Quelle est la probabilité pour que l'urne ait une composition donnée?*

La probabilité *a priori* pour que l'urne renferme $ap_1 + z_1$ boules blanches, $ap_2 + z_2$ boules noires, etc., $ap_n + z_n$ boules vertes est (n° **6**)

$$\frac{e^{-\frac{1}{2a}\left(\frac{z_1^2}{p_1}+\frac{z_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{z_n^2}{p_n}\right]}}{\left(\sqrt{2\pi a}\right)^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}.$$

Dans ces conditions, la probabilité pour extraire une blanche est $\frac{ap_1 + z_1}{a}$, pour extraire une noire $\frac{ap_2 + z_2}{a}$, etc., et la probabilité de l'événement observé est

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu a}\left\{\frac{[am_1-\mu(ap_1+z_1)]^2}{ap_1+z_1}+\frac{[am_2-\mu(ap_2+z_2)]^2}{ap_2+z_2}+\ldots\right\}}}{\sqrt{a}\left(\sqrt{2\pi\mu a}\right)^{n-1}\sqrt{(ap_1+z_1)(ap_2+z_2)\ldots}},$$

a étant un très grand nombre; $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont très petits auprès de $ap_1, ap_2, \ldots, ap_n$.

Négligeant les termes en z dans le dénominateur de l'exponentielle, l'expression ci-dessus peut s'écrire

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu a^2}\left\{\frac{[am_1-\mu(ap_1+z_1)]^2}{p_1}+\frac{[am_2-\mu(ap_2+z_2)]^2}{p_2}+\ldots\right\}}}{a^n\left(\sqrt{2\pi\mu}\right)^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}},$$

et la probabilité demandée a pour valeur

$$\frac{e^{-\frac{1}{2a^2}\left[\frac{(\mu+a)z_1^2-2am_1z_1}{p_1}+\frac{(\mu+a)z_2^2-2am_2z_2}{p_2}+\ldots\right]}}{\int\int\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2a^2}\left[\frac{(\mu+a)z_1^2-2am_1z_1}{p_1}+\frac{(\mu+a)z_2^2-2am_2z_2}{p_2}+\ldots\right]}dz_1\,dz_2\ldots dz_{n-1}}.$$

Occupons-nous de l'intégrale : posons

$$m_1 = \mu p_1 + u_1, \qquad m_2 = \mu p_2 + u_2, \qquad \ldots.$$

Les u sont du même ordre que les z si μ est très grand et du même ordre que a.

L'intégrale devient

$$e^{\frac{\frac{u_1^2}{p_1}+\frac{u_2^2}{p_2}+\ldots}{2(\mu+a)}} \underbrace{\int\int\cdots\int_{-\infty}^{-\infty}} e^{-\frac{1}{2a^2}\left[\frac{\left(\sqrt{\mu+a}\,z_1-\frac{au_1}{\sqrt{\mu+a}}\right)^2}{p_1}+\frac{\left(\sqrt{\mu+a}\,z_2-\frac{au_2}{\sqrt{\mu+a}}\right)^2}{p_2}+\ldots\right]} dz_1\, dz_2 \ldots dz_{n-1};$$

en posant

$$\sqrt{\mu+a}\,z_1-\frac{au_1}{\sqrt{\mu+a}}=\eta_1, \qquad \sqrt{\mu+a}\,z_2-\frac{au_2}{\sqrt{\mu+a}}=\eta_2, \qquad \ldots,$$

elle se réduit à

$$\frac{e^{\frac{1}{2(\mu+a)}\left(\frac{u_1^2}{p_1}+\frac{u_2^2}{p_2}+\ldots\right)}}{(\sqrt{\mu+a})^{n-1}} \underbrace{\int\int\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}} e^{-\frac{1}{2a^2}\left(\frac{\eta_1^2}{p_1}+\frac{\eta_2^2}{p_2}+\ldots\right)} d\eta_1\, d\eta_2 \ldots d\eta_{n-1}.$$

La somme des η étant nulle, cette dernière intégrale a pour valeur, d'après la formule du n° **8**,

$$a^{n-1}(\sqrt{2\pi})^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n};$$

l'intégrale a donc pour valeur

$$\left(\frac{a\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\mu+a}}\right)^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}\, e^{\frac{1}{2(\mu+a)}\left(\frac{u_1^2}{p_1}+\frac{u_2^2}{p_2}+\ldots\right)}$$

ou

$$\left(\frac{a\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\mu+a}}\right)^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}\, e^{\frac{1}{2(\mu+a)}\left[\frac{(m_1-\mu p_1)^2}{p_1}+\frac{(m_2-\mu p_2)^2}{p_2}+\ldots\right]},$$

et *la probabilité cherchée pour que l'urne renferme* ap_1+z_1 *boules blanches*, ap_2+z_2 *boules noires, etc., est*

$$\left(\frac{\sqrt{\mu+a}}{a\sqrt{2\pi}}\right)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}$$
$$\times\, e^{\frac{\mu^2}{2(\mu+a)}-\frac{1}{2(\mu+a)}\left(\frac{m_1^2}{p_1}+\frac{m_2^2}{p_2}+\ldots\right)-\frac{(\mu+a)}{2a^2}\left(\frac{z_1^2}{p_1}+\frac{z_2^2}{p_2}+\ldots\right)+\frac{1}{a}\left(\frac{m_1 z_1}{p_1}+\frac{m_2 z_2}{p_2}+\ldots\right)} dz_1\, dz_2 \ldots dz_{n-1}.$$

La plus grande probabilité a lieu pour

$$z_1=\frac{a(m_1-\mu p_1)}{a+\mu}, \qquad z_2=\frac{a(m_2-\mu p_2)}{a+\mu}, \qquad \ldots.$$

Désignons par P_1 la probabilité pour que, si l'on fait un tirage, il sorte de l'urne une boule blanche, par P_2 la probabilité correspondante pour une boule noire, etc. Si les écarts sont z_1, z_2, ..., les probabilités P_1, P_2, ... sont

$$P_1 = \frac{ap_1 + z_1}{a}, \qquad P_2 = \frac{ap_2 + z_2}{a}, \qquad \ldots.$$

32. La plus grande probabilité *a posteriori* a lieu quand

$$z_1 = \frac{a(m_1 - \mu p_1)}{a + \mu}, \qquad z_2 = \frac{a(m_2 - \mu p_2)}{a + \mu}, \qquad \ldots,$$

c'est-à-dire quand les quantités P_1, P_2, ... ont les valeurs

$$P'_1 = p_1 + \frac{m_1 - \mu p_1}{a + \mu}, \qquad P'_2 = p_2 + \frac{m_2 - \mu p_2}{a + \mu}, \qquad \ldots;$$

P_1, P_2, ... diffèrent peu de P'_1, P'_2, ... Posons

$$P_1 = P'_1 + \varepsilon_1, \qquad P_2 = P'_2 + \varepsilon_2, \qquad \ldots.$$

On en déduit

$$\varepsilon_1 = \frac{\mu p_1 - m_1}{a + \mu} + \frac{z_1}{a}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{\mu p_2 - m_2}{a + \mu} + \frac{z_2}{a}, \qquad \ldots.$$

Remplaçant alors dans l'expression de la probabilité *a posteriori* les z par les ε, on obtient

$$\frac{(\sqrt{a + \mu})^{n-1} e^{-\frac{(a+\mu)}{2}\left(\frac{\varepsilon_1^2}{p_1} + \frac{\varepsilon_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{\varepsilon_n^2}{p_n}\right)}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}.$$

Telle est la probabilité pour que P_1 ait la valeur $P'_1 + \varepsilon_1$, P'_2 la valeur $P'_2 + \varepsilon_2$, ...

33. Si l'on effectue μ' nouveaux tirages (toujours en remettant après chaque tirage la boule sortie), la probabilité pour obtenir $\mu' P'_1 + x_1$ boules blanches, $\mu' P'_2 + x_2$ boules noires, etc., c'est-à-dire la probabilité pour que les écarts soient x_1, x_2, ..., x_n, a pour expression

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu'\frac{a+\mu+\mu'}{a+\mu}}\left(\frac{x_1^2}{p_1} + \frac{x_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{p_n}\right)}}{\left(\sqrt{2\pi\mu'\frac{a + \mu + \mu'}{a + \mu}}\right)^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}.$$

34. *En μ épreuves, l'événement A_1 s'est produit m_1 fois, l'événement A_2, m_2 fois, etc., l'événement A_n, m_n fois. μ' nouvelles épreuves devant avoir lieu, en désignant par $m'_1, m'_2, \ldots, m'_n$ les nombres des arrivées des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$, quelle est la probabilité pour que*

$$\alpha_1 m'_1 + \alpha_2 m'_2 + \ldots + \alpha_n m'_n$$

ait une valeur donnée s?

μ et μ' sont de très grands nombres ; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des coefficients donnés qui peuvent désigner, par exemple, les pertes possibles d'un joueur à chaque épreuve ; s désigne alors la perte totale dans l'ensemble des μ' nouvelles épreuves.

Posons

$$\frac{m_1}{\mu} = p_1, \qquad \frac{m_2}{\mu} = p_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{m_n}{\mu} = p_n.$$

Supposons que les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ aient pour probabilités $(p_1 + \varepsilon_1)$, $(p_2 + \varepsilon_2)$, $\ldots$, $(p_n + \varepsilon_n)$; la probabilité de cette éventualité est

$$\frac{(\sqrt{\mu})^{n-1} e^{-\frac{\mu}{2}\left(\frac{\varepsilon_1^2}{p_1} + \frac{\varepsilon_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{\varepsilon_n^2}{p_n}\right)}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1} \sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}.$$

Ces valeurs $(p_1 + \varepsilon_1)$, $\ldots$, $(p_n + \varepsilon_n)$ donnent pour la probabilité de la quantité s

$$\frac{e^{-\frac{\{s - \mu'[(p_1+\varepsilon_1)\alpha_1 + (p_2+\varepsilon_2)\alpha_2 + \ldots + (p_n+\varepsilon_n)\alpha_n]\}^2}{2\mu'\{[(p_1+\varepsilon_1)\alpha_1^2 + (p_2+\varepsilon_2)\alpha_2^2 + \ldots + (p_n+\varepsilon_n)\alpha_n^2] - [(p_1+\varepsilon_1)\alpha_1 + (p_2+\varepsilon_2)\alpha_2 + \ldots + (p_n+\varepsilon_n)]^2\}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu'\{[(p_1+\varepsilon_1)\alpha_1^2 + (p_2+\varepsilon_2)\alpha_2^2 + \ldots + (p_n+\varepsilon_n)\alpha_n^2] - [(p_1+\varepsilon_1)\alpha_1 + (p_2+\varepsilon_2)\alpha_2 + \ldots + (p_n+\varepsilon_n)\alpha_n]^2\}}},$$

d'après la formule relative à la probabilité d'une somme (consulter mon Mémoire sur les probabilités continues, n° 9).

La probabilité des valeurs

$$(p_1 + \varepsilon_1), \quad \ldots, \quad (p_n + \varepsilon_n) \qquad \text{et} \qquad s$$

est, d'après le principe des probabilités composées, égale au produit des deux dernières expressions, et la probabilité cherchée est, en

vertu du principe des probabilités totales,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\sqrt{\mu})^{n-1}e^{-\frac{\mu}{2}\left(\frac{\varepsilon_1^2}{p_1}+\frac{\varepsilon_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{\varepsilon_n^2}{p_n}\right)}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}}$$

$$\times\frac{e^{-\frac{\{s-\mu'[(p_1+\varepsilon_1)\alpha_1+\ldots+(p_n+\varepsilon_n)\alpha_n]\}^2}{2\mu'\{[(p_1+\varepsilon_1)\alpha_1^2+\ldots+(p_n+\varepsilon_n)\alpha_n^2]-[(p_1+\varepsilon_1)\alpha_1+\ldots+(p_n+\varepsilon_n)\alpha_n]^2\}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu'\{[(p_1+\varepsilon_1)\alpha_1^2+\ldots+(p_n+\varepsilon_n)\alpha_n^2]-[(p_1+\varepsilon_1)\alpha_1+\ldots+(p_n+\varepsilon_n)\alpha_n]^2\}}}\,d\varepsilon_1\,d\varepsilon_2\ldots d\varepsilon_{n-1}.$$

On doit, dans cette formule, remplacer ε_n par $-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{n-1})$; on doit aussi ne conserver les ε que dans la première exponentielle et dans le numérateur de la seconde.

Lorsqu'il n'y a qu'une variable ε, l'expression se réduit à

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\mu\varepsilon^2}{2p_1p_2}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2p_1p_2}}\,\frac{e^{-\frac{\{s-\mu'[(p_1+\varepsilon)\alpha_1+(p_2-\varepsilon)\alpha_2]\}^2}{2\mu'p_1p_2(\alpha_1-\alpha_2)^2}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu'p_1p_2(\alpha_1-\alpha_2)^2}}\,d\varepsilon;$$

elle s'intègre facilement et devient

$$\frac{e^{-\frac{[s-\mu'(\alpha_1p_1+\alpha_2p_2)]^2}{2\mu'p_1p_2(\alpha_1-\alpha_2)^2\frac{\mu+\mu'}{\mu}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu'p_1p_2(\alpha_1-\alpha_2)^2\frac{\mu+\mu'}{\mu}}}.$$

Dans le cas où le nombre des variables est quelconque, les intégrations sont pénibles; il est à la fois plus simple et plus élégant de résoudre le problème en faisant appel à la théorie des *probabilités connexes* que j'ai exposée dans mon Mémoire sur les probabilités continues (n° **17**).

Posons

$$s=\mu'p_1\alpha_1+\mu'p_2\alpha_2+\ldots+\mu'p_n\alpha_n+x;$$

x est l'*écart*. Le problème considéré revient à chercher la probabilité de cet écart.

Supposons qu'un joueur H perde une somme égale à l'écart ; supposons que les μ' nouvelles épreuves soient effectuées et qu'elles aient donné m'_1, m'_2, ..., m'_n pour les nombres des arrivées des événements A_1, A_2, ..., A_n.

L'écart x est alors connu et il a pour valeur

$$x = \alpha_1 m'_1 + \alpha_2 m'_2 + \ldots + \alpha_n m'_n - \mu'(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n).$$

Si une nouvelle épreuve a lieu, l'événement A_1 s'étant produit $m_1 + m'_1$ fois en $\mu + \mu'$ épreuves a probabilité $\frac{m_1 + m'_1}{\mu + \mu'}$ de se produire, et alors l'écart augmente de la quantité

$$\alpha_1 - (p_1 \alpha_1 + p_2 \alpha_2 + \ldots + p_n \alpha_n).$$

Il y a de même probabilité $\frac{m_2 + m'_2}{\mu + \mu'}$ pour que l'écart augmente de

$$\alpha_2 - (p_1 \alpha_1 + p_2 \alpha_2 + \ldots + p_n \alpha_n).$$

Etc. L'espérance mathématique du joueur H pour une nouvelle épreuve est donc

$$-\sum \frac{m_1 + m'_1}{\mu + \mu'} [\alpha_1 - (p_1 \alpha_1 + p_2 \alpha_2 + \ldots + p_n \alpha_n)]$$

ou

$$-\frac{\alpha_1 m'_1 + \alpha_2 m'_2 + \ldots + \alpha_n m'_n - \mu'(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n)}{\mu + \mu'} = -\frac{x}{\mu + \mu'}.$$

L'espérance mathématique du joueur H pour une nouvelle épreuve est égale au produit de sa perte actuelle par une fonction de μ'.

La fonction d'instabilité du jeu de H pour une nouvelle épreuve se calcule de même, et elle a pour expression, après suppression des quantités négligeables,

$$2[(\alpha_1^2 p_1 + \alpha_2^2 p_2 + \ldots + \alpha_n^2 p_n) - (\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n)^2].$$

L'espérance du joueur H étant égale au produit de sa perte actuelle par une fonction de μ' et la fonction d'instabilité de son jeu étant constante, il suffit d'appliquer la formule démontrée au n° **24** du Mémoire précité.

La probabilité pour que le joueur H perde la somme x en μ' épreuves est exprimée par la formule

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{F(\mu')}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{F(\mu')}} dx,$$

F étant l'intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{\partial F}{\partial \mu'} - \frac{2F}{\mu+\mu'} = 2[(\alpha_1^2 p_1 + \alpha_2^2 p_2 + \ldots + \alpha_n^2 p_n) - (\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n)^2],$$

d'où

$$F = 2\mu'[(\alpha_1^2 p_1 + \alpha_2^2 p_2 + \ldots + \alpha_n^2 p_n) - (\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n)^2]\frac{\mu+\mu'}{\mu}.$$

La probabilité de l'écart de x est donc

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\mu'[(\alpha_1^2 p_1+\alpha_2^2 p_2+\ldots+\alpha_n^2 p_n)-(\alpha_1 p_1+\alpha_2 p_2+\ldots+\alpha_n p_n)^2]\frac{\mu+\mu'}{\mu}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu'[(\alpha_1^2 p_1+\alpha_2^2 p_2+\ldots+\alpha_n^2 p_n)-(\alpha_1 p_1+\alpha_2 p_2+\ldots+\alpha_n p_n)^2]\frac{\mu+\mu'}{\mu}}}\,dx.$$

Si les probabilités des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ avaient pour valeurs exactes $p_1, p_2, \ldots, p_n$, la probabilité de l'écart x serait

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\mu'[(\alpha_1^2 p_1+\alpha_2^2 p_2+\ldots+\alpha_n^2 p_n)-(\alpha_1 p_1+\alpha_2 p_2+\ldots+\alpha_n p_n)^2]}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu'[(\alpha_1^2 p_1+\alpha_2^2 p_2+\ldots+\alpha_n^2 p_n)-(a_1 p_1+a_2 p_2+\ldots+\alpha_n p_n)^2]}}\,dx.$$

L'ignorance où l'on est des valeurs exactes des probabilités augmente les écarts dans le rapport de $\sqrt{\mu+\mu'}$ à $\sqrt{\mu}$.

TABLE DES MATIÈRES.

SIXIÈME SÉRIE. — TOME IV.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.

(*Note de la Rédaction*).

FIN DU TOME IV DE LA SIXIÈME SÉRIE.

40138 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

